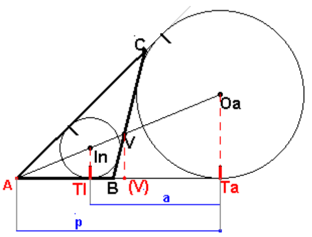
Problema 826
Construir el triángulo cuyos datos son wa, a, b+c, siendo wa la bisectriz interna.
Petersen, J. (1901): Méthodes et théories pour la résolution des problémes de constructions géomètriques. Gauthier - Villars (116), p. 21

Resuelto por JULIÁN SANTAMARÍA TOBAR profesor de Dibujo del IES La Serna de Fuenlabrada

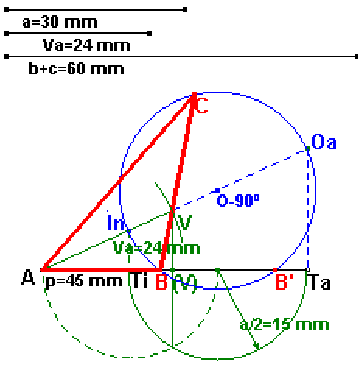
El problema se va a resolver por dos métodos.

Primer método, cuaterna armónica proyectada en el lado c



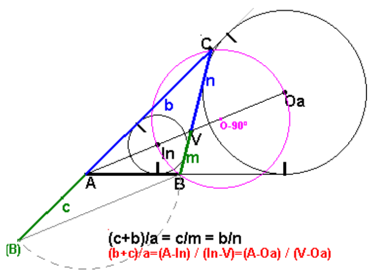
En un triángulo los extremos de la bisectriz, son los centros de homotecia entre la circunferencia inscrita y la exinscrita del ángulo A, por lo tanto, forman una cuaterna armónica. Al proyectar esta cuaterna A-V-In-Oa en el lado c, resulta la cuaterna A-(V)-Ti-Ta. De estos cuatro puntos se conocen tres A, Ti y Ta, por consiguiente, se puede obtener el punto (V).

Resolución del ejercicio

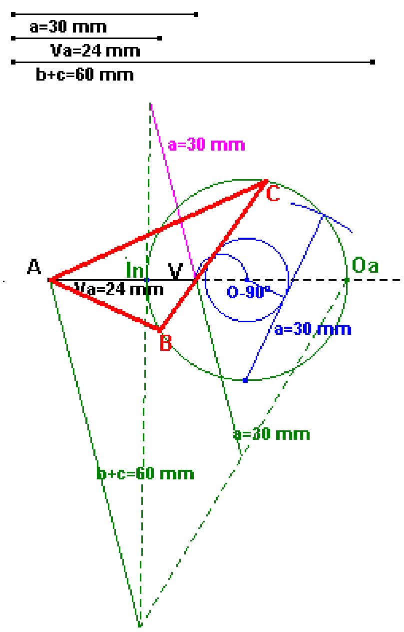


Se fija el vértice A y los puntos de tangencia de la inscrita y la circunscrita Ti y Ta. Como el segmento A(V) está separado armónicamente del segmento Ti Ta, se obtiene el punto (V). Del triángulo rectángulo A(V)V se conoce la hipotenusa cuyo valor es la bisectriz dada, luego se obtiene su posición. Se hallan los centros In y Oa.
El vértice B se halla mediante un arco capaz de 90º del segmento formado por los centros hallados, porque las dos bisectrices que parten del vértice B. Por último, se dibuja el lado a que pasa por B y por el pie V de la bisectriz.

Segundo método, cuaterna formada por la bisectriz y los centro In y Oa



Según el teorema de la bisectriz, los lados b y c, son proporcionales a los segmentos que la bisectriz del ángulo A divide el lado a. (c+b)/a = c/m = b/n
El lugar geométrico de los puntos C cuya relación de distancias a dos puntos fijos, (el vértice A y el pie V de su bisectriz), es la constante (b+c)/a, forman la figura de una circunferencia. Esta definición es el lugar geométrico de Apolonio del segmento AV con la razón (c+b)/a, cumpliéndose: (b+c)/a = (A-In) / (In-V) = (A-Oa) / (V-Oa). Luego se puede obtener la cuaterna A-V-In-Oa, porque se conoce el segmento AV (la bisectriz dada) y la razón de las ternas AVIn y AVOa.



Resolución del ejercicio

Se fija el segmento AV (la bisectriz dada) y con la razón (b+c)/a, se obtienen los centros In y Oa. El lado a, es una cuerda de la circunferencia cuyo diámetro es In-Oa y pasa por el pie V de la bisectriz. Con un giro, se coloca en su posición.
Tiene dos soluciones simétricas respecto de la bisectriz dada.