Problema 826

Construïu el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ coneguts $a, b+c, w_a$, on $w_a$ és la bisectriu interna.

*Petersen, J. (1901): Méthodes et théories pour la résolution des problémes de constructions géomètriques . Gauthier - Villars (116), p. 21*

Solució de Ricard Peiró i Estruch :

$S_{ADC} = \frac{1}{2} w_a b \cdot \sin\frac{A}{2}$. $S_{ADB} = \frac{1}{2} w_a c \cdot \sin\frac{A}{2}$.

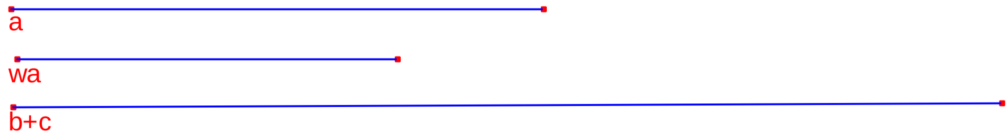
$S_{ABC} = \frac{1}{2} w_a (b+c)\sin\frac{A}{2} = r \cdot p = \frac{1}{2}(a+b+c)\frac{1}{2}(-a+b+c)\mathrm{tg}\frac{A}{2}$.

$\cos\frac{A}{2} = \frac{(a+b+c)(-a+b+c)}{2(b+c)w_a}$.

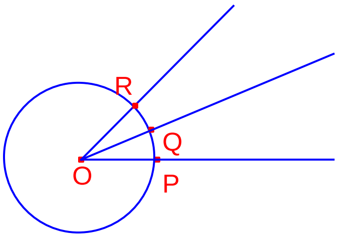
Amb aquesta igualtat podem construir els angles $\frac{A}{2}, A$.

El problema es transformaria en construir el triangle coneguts $a, A, b+c$.

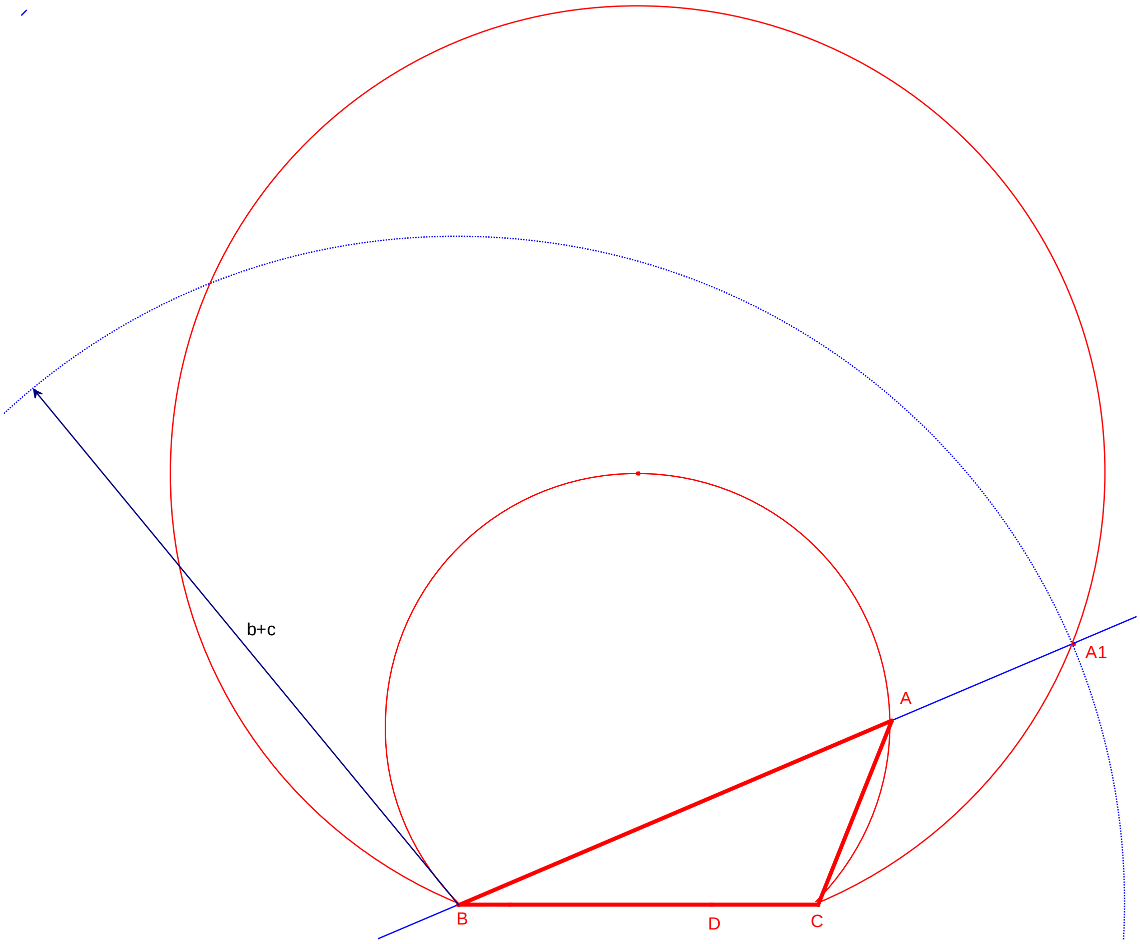
Passos de la construcció:




a) Construir els angles $\frac{A}{2}$, A




b) Dibuixar el segment $\overline{BC} = a$.




c) Dibuixar els arcs capaços de $\frac{A}{2}$, A sobre el segment $\overline{BC}$.

d) Dibuixar la circumferència de centre B i radi $b + c$.

e) La circumferència de centre B talla l'arc capaç de $\frac{A}{2}$ en el punt $A_1$.

f) Dibuixar la recta que passa pels punts B, $A_1$, que talla l'arc capaç de $\frac{A}{2}$ en el punt A.

Problema:

Siga el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ coneguts $a = 7, b + c = 13, w_a = 5$.

$\cos\frac{A}{2} = \frac{(a+b+c)(-a+b+c)}{2(b+c)w_a}$.

$\cos\frac{A}{2} = \frac{20\cdot 5}{2\cdot 13\cdot 5} = \frac{12}{13}$.

$\cos A = 2\cos^2\frac{A}{2} - 1 = \frac{119}{169}$.

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$:

$7^2 = b^2 + (13-b)\text{^}2 - 2b\cdot(13-b)\frac{119}{169}$. Resolent l'equació:

$b = \frac{78 - 13\sqrt{6}}{12}$, $c = \frac{78 + 13\sqrt{6}}{12}$.