Problema 826

Construir el triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$ conocidos $a, b+c, w_a$, on w_a es la bisectriz interna.

Petersen, J. (1901): Méthodes et théories pour la résolution des problémes de constructions géomètriques . Gauthier - Villars (116), p. 21

Solución de Ricard Peiró i Estruch:

$S_{ADC}=\frac{1}{2}w_a b\cdot\sin\frac{A}{2}$. $S_{ADB}=\frac{1}{2}w_a c\cdot\sin\frac{A}{2}$.

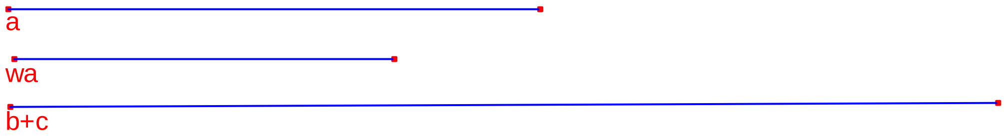
$S_{ABC}=\frac{1}{2}w_a(b+c)\sin\frac{A}{2}=r\cdot p=\frac{1}{2}(a+b+c)\frac{1}{2}(-a+b+c)\mathrm{tg}\frac{A}{2}$.

$\cos\frac{A}{2}=\frac{(a+b+c)(-a+b+c)}{2(b+c)w_a}$.

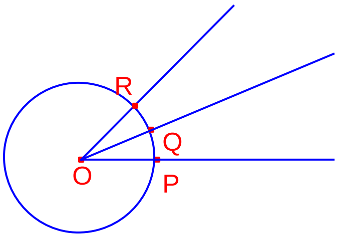
Con esta igualdad podemos construir los ángulos $\frac{A}{2}$, A.

El problema se transformaría en construir el triángulo conocidos $a, A, b+c$.

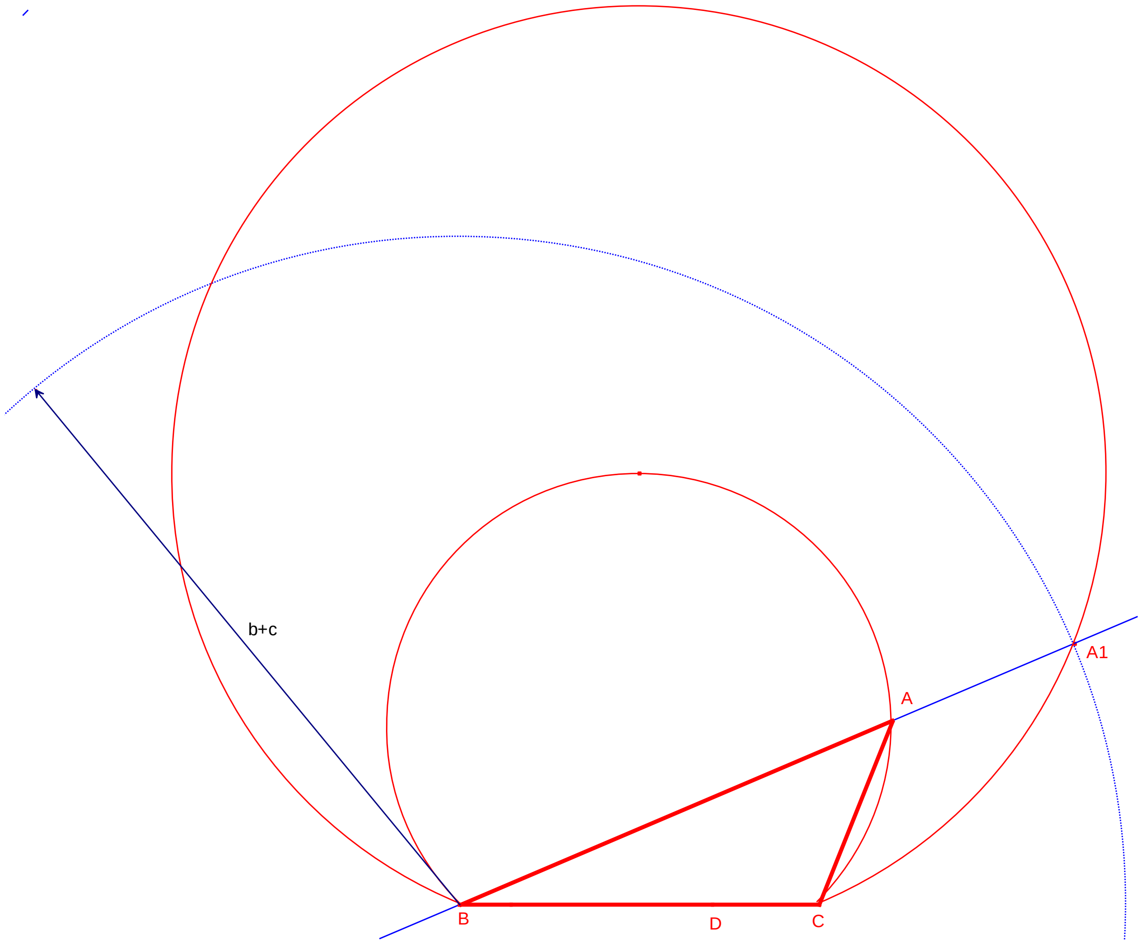
Pasos de la construcción:



a) Construir los ángulos $\frac{A}{2}$, A



b) Dibujar el segmento $\overline{BC} = a$.



c) Dibujar los arcos capaces de $\frac{A}{2}$, A sobre el segmento $\overline{BC}$.

d) Dibujar la circunferencia de centro B i radi $b + c$.

e) La circunferencia de centro B corta el arco capaz de $\frac{A}{2}$ en el punt A_1.

f) Dibujar la recta que pasa por los puntos B, A_1, que corta el arco capaz de $\frac{A}{2}$ en el punto A.

Problema:

Siga el triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$ conocidos $a = 7, b + c = 13, w_a = 5$.

$$\cos\frac{A}{2} = \frac{(a+b+c)(-a+b+c)}{2(b+c)w_a}.$$

$$\cos\frac{A}{2} = \frac{20 \cdot 5}{2 \cdot 13 \cdot 5} = \frac{12}{13}.$$

$$\cos A = 2\cos^2\frac{A}{2} - 1 = \frac{119}{169}.$$

Aplicando el teorema del coseno al triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$:

$7^2 = b^2 + (13-b)\text{^}2 - 2b \cdot (13-b)\frac{119}{169}$. Resolviendo la ecuación:

$$b = \frac{78 - 13\sqrt{6}}{12},\ c = \frac{78 + 13\sqrt{6}}{12}.$$