Problema n° 826
Propuesto por Julián Santamaría Tobar
Construir el triángulo cuyos datos son w_a,a, b+c, siendo w_a la bisectriz interna
Petersen, J. (1901): Méthodes et théories pour la résolution des problémes de constructions géomètriques . Gauthier - Villars (116), p. 21

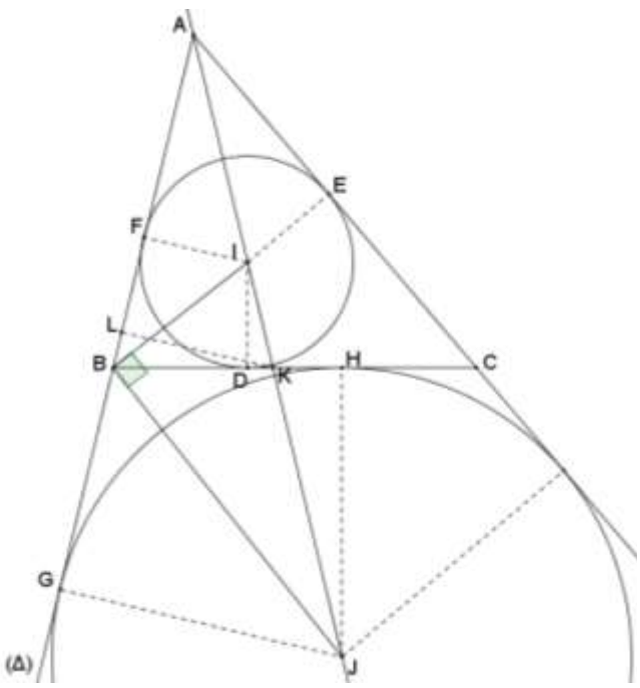
Solutions proposées par Philippe Fondanaiche

1) Solution analytique

On désigne par K le point d'intersection de la bissectrice de l'angle en A avec le côté BC.
Par hypothèse on suppose que les longueurs BC = a, AK = w_a et AC + AB = b + c = S sont connues.
D'après l'article Length of Angle Bisector, la bissectrice AK s'exprime en fonction des côtés a,b et c du triangle ABC selon la formule: $w_a = \frac{bc\sqrt{(b+c)^2 - a^2)}}{b+c}$

En posant P = bc, on obtient $P = \frac{Sw_a}{\sqrt{S^2 - a^2}}$ .P est donc constructible avec une règle et un compas.
Dès lors b et c sont les solutions de l'équation du second degré $x^2 - Sx + P = 0$.
Il en résulte que les deux segments AB et AC et donc le triangle ABC sont constructibles avec une règle et un compas.

2) Solution géométrique



On désigne par D,E,F les points de contact du cercle inscrit de centre I avec les côtés BC,AC et AB du triangle ABC.
Le point G est le point de contact du cercle exinscrit de centre J dans le secteur de l'angle en A avec la demi-droite (Δ) portée par le côté AB et le point H est le point de contact de ce même cercle avec le côté BC.
Soit K le point d'intersection de la bissectrice issue de A avec le côté BC.
Il est bien connu que les points A,K,I et J forment une division harmonique et il en est de même de leurs projections A,L,F et G sur (Δ).
Or AF = AE = (– a + b + c)/2
et AG = AB + BH = AB + CD = (a + b + c)/2.
Comme a et b + c sont connus, les points A,F et G sont déterminés sur (Δ).
On déduit le point L tel que LF/LG = AF/AG puis le point K à l'intersection de la perpendiculaire en L à (Δ) avec le cercle de centre A et de rayon w_a.
D'où la bissectrice AK puis les points I et J, les cercles inscrit et exinscrit de centrs I et J,etc.....