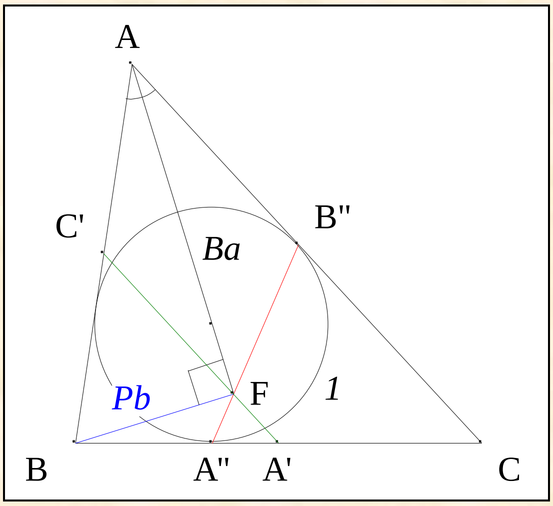
AN UNLIKELY CONCURRENCE

REVISITED AND GENERALIZED

†

La Croix est le symbole
du croisement et de l'union [1]
des complémentarités

Jean-Louis AYME [2]



Résumé. Nous présentons deux preuves purement synthétique d'un résultat concernant deux "unlikely concurrence", suivies resp. d'une généralisation de l'auteur et de Wilson Stothers.
Les figures sont toutes en position générale et tous les théorèmes cités peuvent tous être démontrés synthétiquement.

Remerciements. L'auteur remercie tout particulièrement le Professeur Ercole Suppa [3] pour avoir relu cet article en lui apportant de précieuses remarques.

Abstract. We present two purely synthetic proof of a result concerning two "unlikely concurrences", followed by resp. a generalization of the author and Wilson Stothers.
The figures are all in general position and all cited theorems can all be shown synthetically.

Acknoledgement. The author thanks Professor Ercole Suppa for reviewing this article with valuable notes.

---

1 et non d'une combinaison
2 Saint-Denis, Île de La Réunion (Océan Indien, France), le 23/06/2014 ; jeanlouisayme@yahoo.fr
3 Suppa E., *Geometria Elementar* ; http://www.esuppa.it/

Sommaire

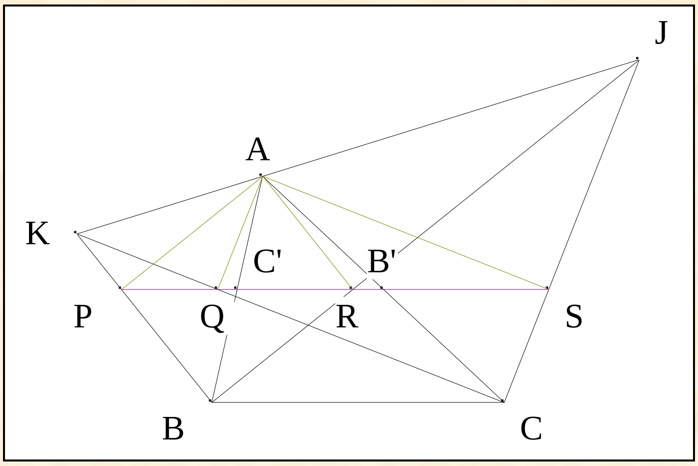
A. AN UNLIKELY CONCURRENCE

I. ARTHUR LASCASES [4]

1. Six points alignés

VISION

Figure :

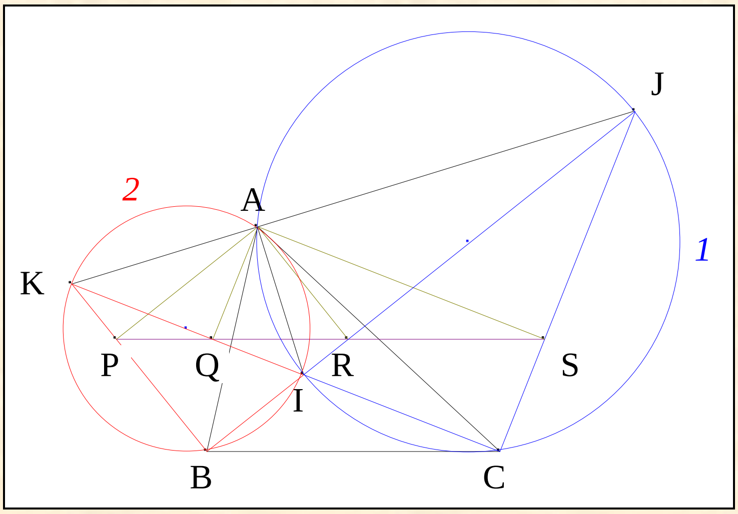


Traits :		ABC	un triangle,
		B', C'	les milieux de [CA], [AB],
		J, K	les points B, C-excentraux de ABC
	et	P, Q, R, S	les pieds des perpendiculaires abaissées de A sur (BK), (CK), (BJ), (CJ).

Donné : P, Q, R, S, B' et C' sont alignés.

VISUALISATION

[4] Lascases Arth., Question **477**, *Nouvelles Annales* **18** (1859) 171 ; http://www.numdam.org/numdam-bin/feuilleter?j=NAM&sl=0



- Notons I le point d'intersection des bissectrices (BJ) et (CK).

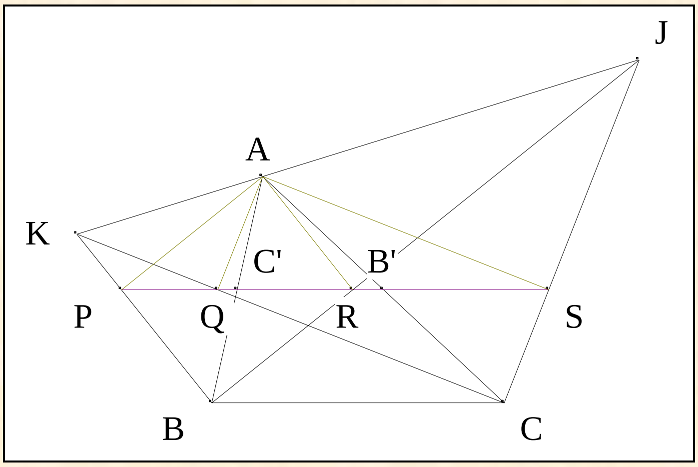
- **Scolies :** **(1)** (BJ), (CK) sont resp. les B, C-bissectrices de ABC
  (2) les bissectrices intérieure et extérieure d'un triangle en un sommet, sont perpendiculaires.

- Notons *1* le cercle de diamètre [IJ] ; il passe par A et C ;
  et *2* le cercle de diamètre [IK] ; il passe par A et B.

- D'après "La droite de Simson-Wallace" (Cf. **E.** Annexe **1**),
  (1) (QRS) est la droite de Simson de pôle A relativement au triangle JCI, inscrit dans *1*
  (2) (PQR) est la droite de Simson de pôle A relativement au triangle IBK, inscrit dans *2*.

- D'après l'axiome d'incidence **Ia**, (PQR) = (QRS).

- **Conclusion partielle :** P, Q, R et S sont alignés.



- Les quadrilatères APBR et AQCS étant des rectangles, leurs diagonales se coupent en leur milieu.

- **Conclusion :** d'après l'axiome d'incidence **Ia**, P, Q, R, S, B' et C' sont alignés.

Énoncé de Lascases : les projections du sommet d'un triangle sur les quatre bissectrices des deux autres angles sont en ligne droite.

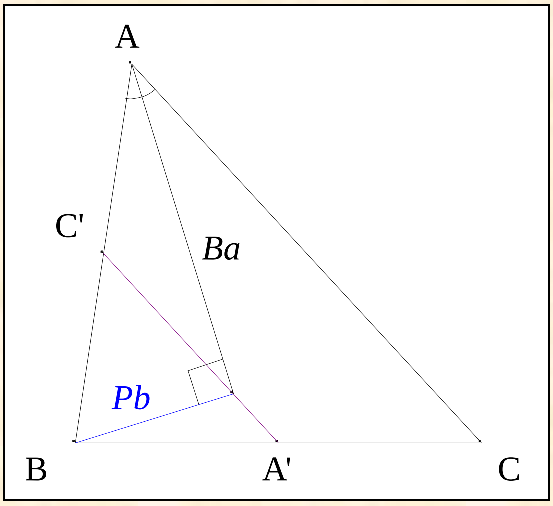
Énoncé traditionnel : les pieds des perpendiculaires abaissées d'un sommet d'un triangle sur les bissectrices intérieures et extérieures en ses deux autres sommets, sont alignés sur le côté correspondant de son triangle médian.

Note historique : les premières solutions ont été données par Joseph Vigne de Toulon, Léon Vidal, élève du même lycée (classe de Huet) et l'abbé Poitrasson.
Le recours à la droite de Simson-Wallace a été utilisé par Wilkinson en 1862 et aussi par l'élève Léon Vidal [5] en 1872.

2. Trois droites concourantes

VISION

Figure :

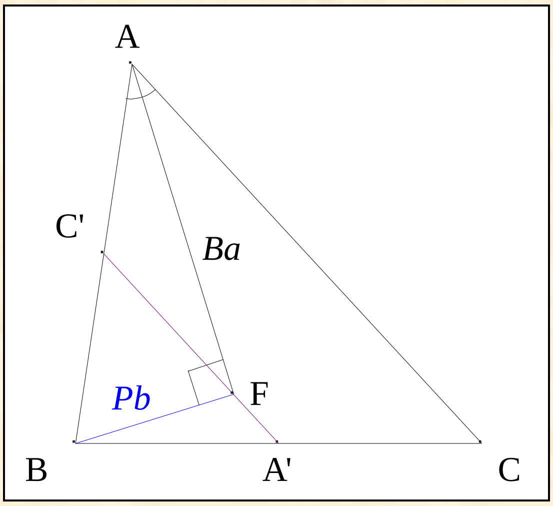


Traits : ABC un triangle,
*B*a la A-bissectrice de ABC,
*P*b la perpendiculaire à *B*a, passant par B,
et A', C' les milieux resp. de [BC], [AB].

Donné : *B*a et *P*b se brisent sur (A'C').

VISUALISATION

[5] Vidal L., *Nouvelles Annales* **2** 11, (1872) 265 ; http://www.numdam.org/numdam-bin/feuilleter?j=NAM&sl=0



- Notons F le point d'intersection de *B*a et *P*b.

- D'après **I. 1.** Six points alignés, (A'C') passe par F.

- **Conclusion :** *B*a et *P*b se brisent sur (A'C').

Énoncé traditionnel : le pied de la perpendiculaire abaissée d'un sommet d'un triangle sur la bissectrice intérieure liée à un autre sommet, est sur le côté du triangle médian opposé au premier sommet.

Note historique : l'historien allemand Max Simon [6] a signalé en 1906 qu'un ancien étudiant de Christophe Camille Gerono [7], Arthur Lascases de la ville de Lorient (France) avait été le premier a situé en 1859, le point F sur (A'C').

II. NATHAN ALTSHILLER-COURT [8]

VISION

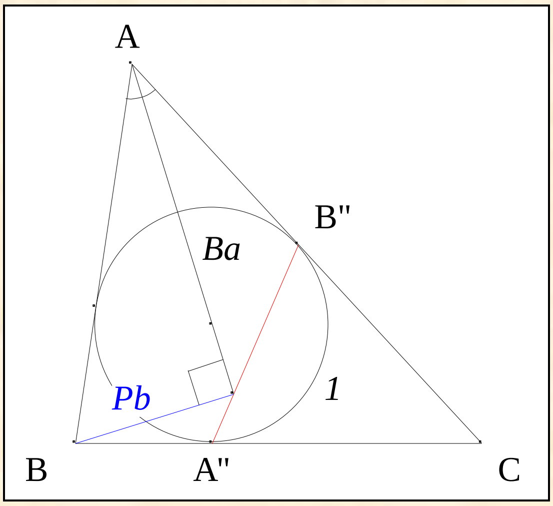
Figure :

---

6 Simon M., *Über die Entwicklung der Elementar-Geometrie im XIX-Jahrhundert* (1906) 127, 133

7 Gerono C. C. (1799-1891)

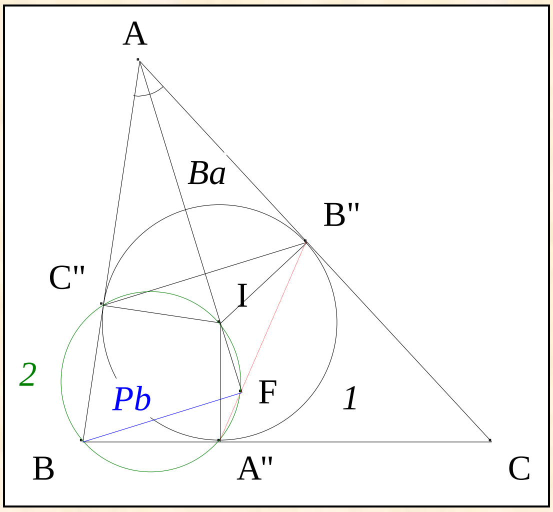
8 Altshiller-Court N., *College Geometry*, Barnes & Noble, Inc., (1952) exercise **43**, p. 118



Traits : ABC un triangle,
1 le cercle inscrit dans ABC,
A", B" les points de contact de *1* avec [BC], [CA],
*B*a la A-bissectrice de ABC
et *P*b la perpendiculaire à *B*a, passant par B.

Donné : *B*a et *P*b se brisent sur (A"B").

VISUALISATION



- Notons C" le point de contact de *1* avec [AB]
  et F le point d'intersection de *B*a et *P*b.

- Nous avons : (C"B") ⊥ *B*a ;
  par hypothèse, *B*a ⊥ *P*b ;
  d'après l'axiome IVa des perpendiculaires, (C"B") // *P*b i.e. (C"B") // (BF).

- Notons *2* le cercle de diamètre [BI] ; il passe par A", C" et F.

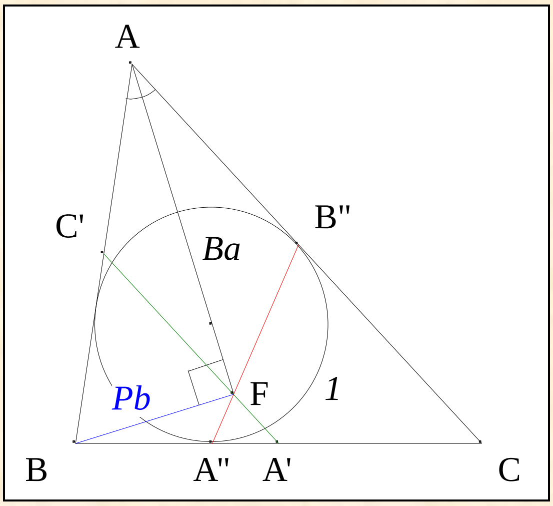
- Les cercles *1* et *2*, les points de base A" et C", la monienne (C"C"B), les parallèles (C"B") et (BF), conduisent au théorème **2'** de Reim ; en conséquence, B", A" et F sont alignés.

- **Conclusion :** *D*a et *D*b se brisent sur (A"B").

Énoncé traditionnel : le pied de la perpendiculaire abaissée d'un sommet d'un triangle sur la bissectrice intérieure liée à un autre sommet, est à la fois sur le côté du triangle médian opposé au premier sommet et sur le côté correspondant du triangle de contact opposé au dernier sommet.

Note historique : ce résultat qui a été qualifié de *an unlikely concurrence* par Ross Honsberger [9] en 1995, a été proposé comme exercice par Nathan Altshiller-Court [10] en 1952 et étudié dans le cas particulier du triangle rectangle par Georges Papelier [11] en 1927.

Scolie : le point F



F est le point de concours des quatre droites *B*a, *P*b, (A'C') et (A"B").

III. WILSON STOTHERS [12]

VISION

Figure :

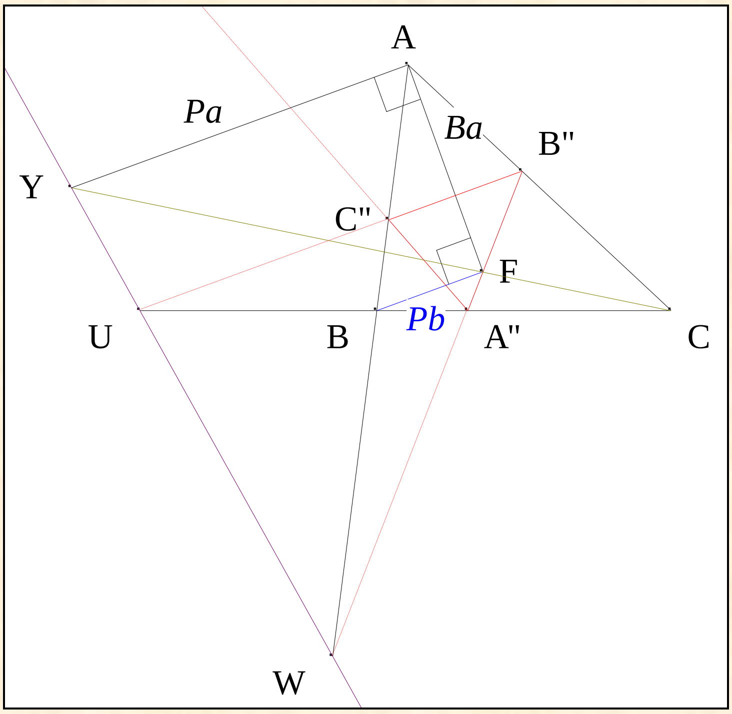
---

9 Honsberger R., *Episodes in Nineteeth and Twentieth Century Euclidean Geometry*, MAA (1995) 31

10 Altshiller-Court N., *College Geometry*, Barnes & Noble, Inc., (1952) exercise **43**, p. 118

11 Papelier G., *Exercices de géométrie Modernes*, Pôles et polaires (1927) 19

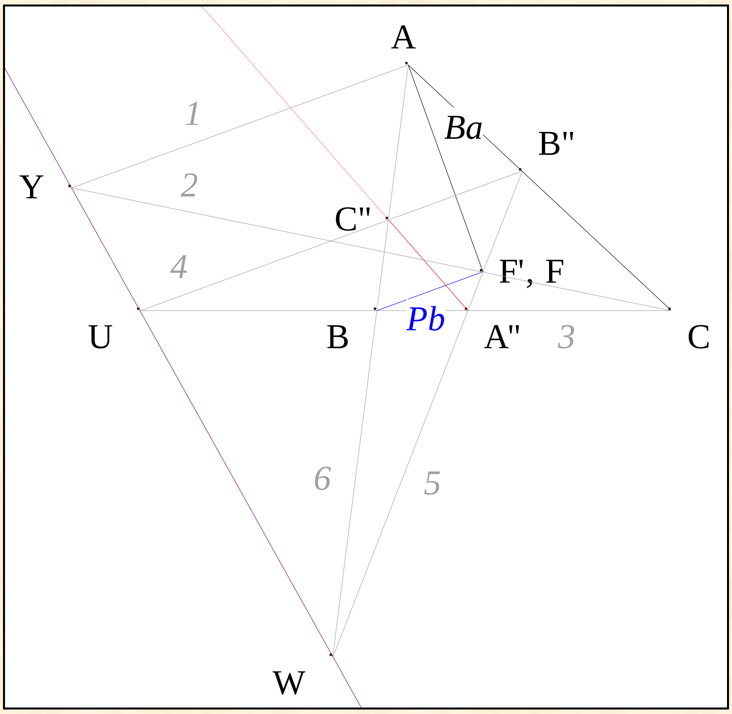
12 Stothers W., Unlikely concurrences, Message *Hyacinthos* # **11516** du 04/09/2005



Traits :	ABC	un triangle,
	*B*a	la A-bissectrice de ABC,
	*P*b	la perpendiculaire à *B*a, passant par B,
	F	le point d'intersection de *B*a et *P*b,
	A"B"C"	le triangle de contact de ABC,
	U, V, W	les A, B, C-points de Nobbs de ABC,
	*P*a	la perpendiculaire à *B*a en A
et	Y	le point d'intersection de *P*a avec (UVW).

Donné : (CY) passe par F.

VISUALISATION



- **Scolies :** **(1)** (UVW) est la droite de Gergonne de ABC i.e. l'arguésienne de ABC et A"B"C"
  (2) *P*a est le support du A-côté du triangle excentral de ABC
  (3) (AY), (B"C"U) et (BF) sont parallèles entre elles.

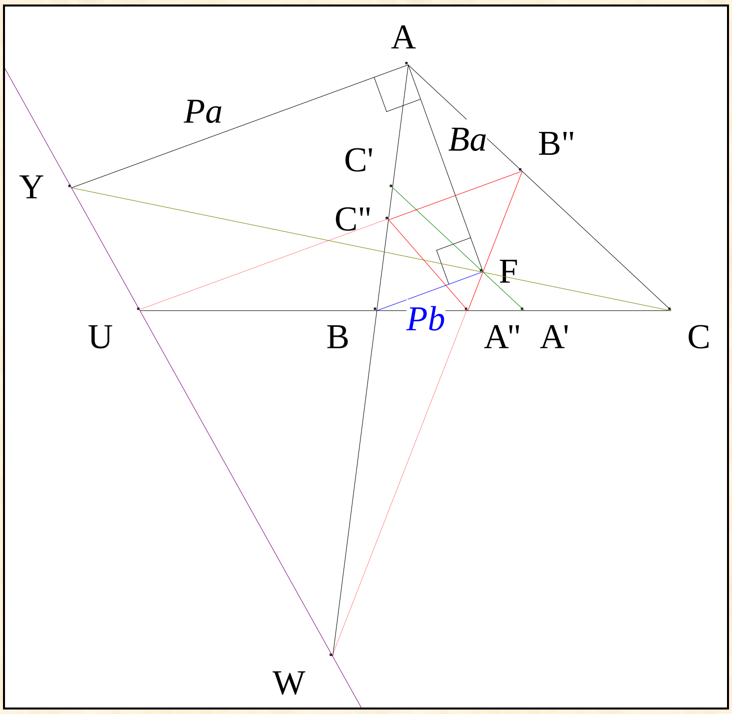
- D'après **II.** Altshiller-Court, *B*a et *P*b se brisent sur (A"B") i.e. F est sur (A"B").

- Notons F' le point d'intersection de (A"B"W) et (CY).

- D'après "Le théorème de Pappus" (Cf. **E.** Annexe **2**),
  (1) (BF') est la pappusienne de l'hexagone AYCUB"WA
  (2) (BF') // (BF) ;
  en conséquence, F' et F sont confondus.

- **Conclusion :** (CY) passe par F.

Scolie : le point F



F est le point de concours des cinq droites *B*a, *P*b, (A'C'), (A''B'') et (CY).

Commentaire : Wilson Stothers [13] a proposé en 2005 un point de vue fédérant ces cinq droites.

IV. L'AUTEUR OU LA SIXIÈME DROITE [14]

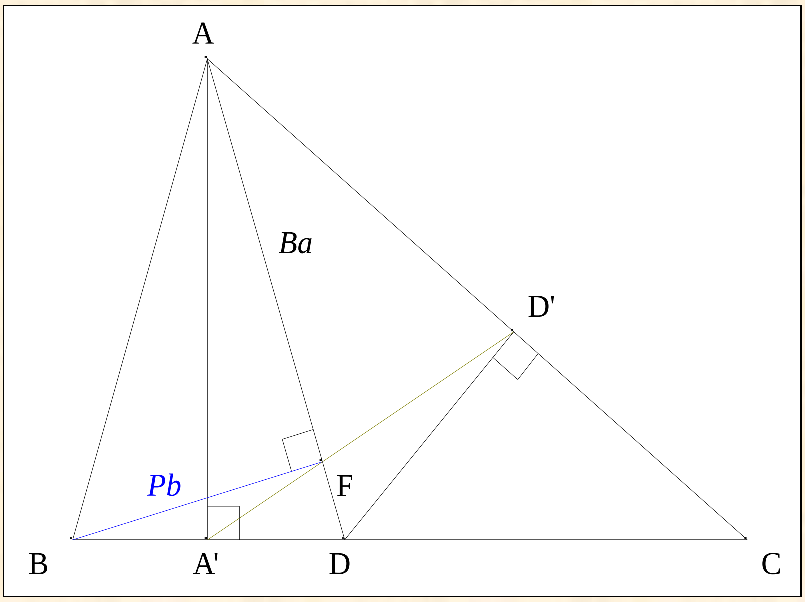
VISION

Figure :

---

[13] Stothers W., Unlikely concurrences, Message *Hyacinthos* # **11516** du 04/09/2005

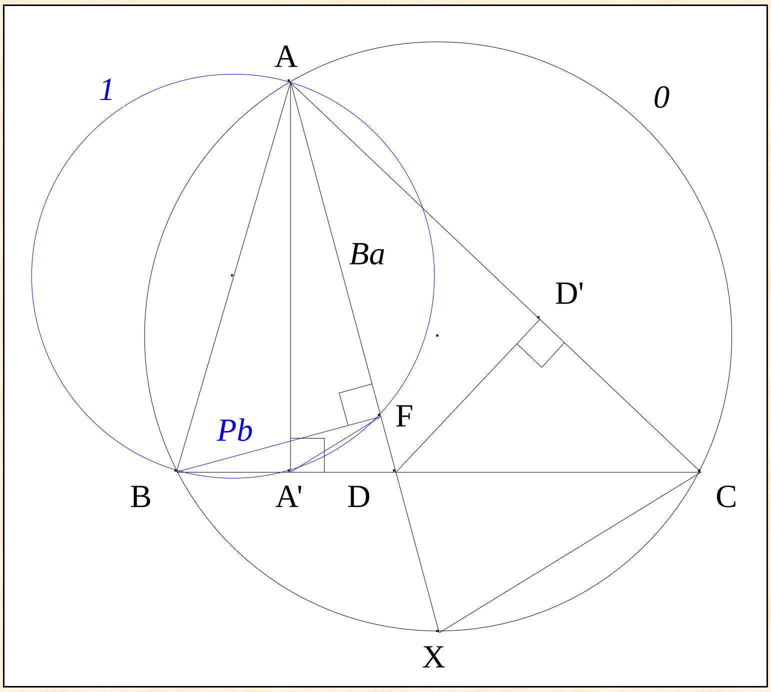
[14] Ayme J.-L. (28/04/2006)



Traits :	ABC	un triangle,
	*B*a	la A-bissectrice de ABC,
	*P*b	la perpendiculaire à *B*a, passant par B,
	F	le point d'intersection de *B*a et *P*b,
	D	le pied de *B*a,
	D'	le pied de la perpendiculaire abaissée de D sur (CA)
et	A'	le pied de la A-hauteur de ABC sur (BC).

Donné : A', F et D' sont alignés.

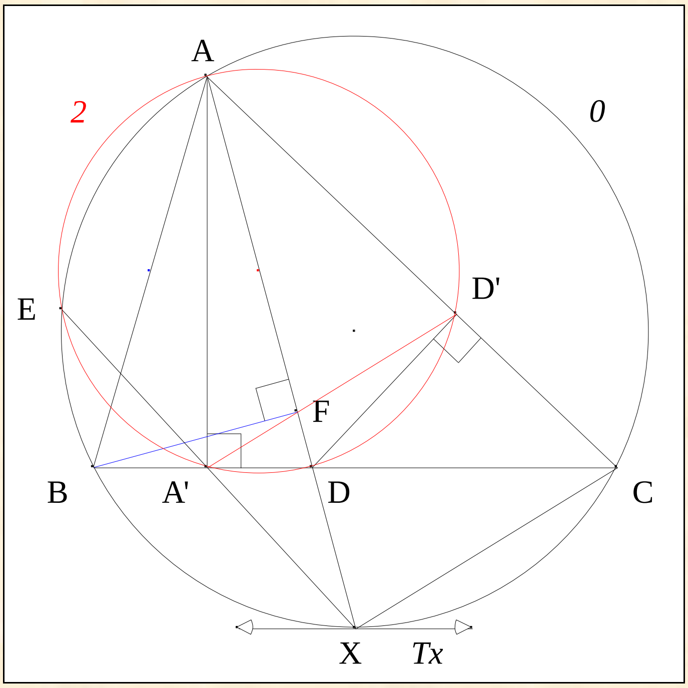
VISUALISATION



- Notons *0* le cercle circonscrit de ABC,
  1 le cercle de diamètre [AB]
  et X le second point d'intersection de (AD) avec *0*.

- D'après Thalès "Triangle inscriptible dans un demi cercle", *1* passe par A' et F.

- Les cercles *1* et *0*, les points de base A et B, les moniennes (FAX) et (A'BC), conduisent au théorème **0** de Reim ; il s'en suit que (FA') // (XC).



- Notons *2* le cercle de diamètre [AF] ; il passe par A' et D' ;
  E le second point d'intersection de *0* et *2*,
  et *Tx* la tangente à *0* en X.

- D'après Thalès "Triangle inscriptible dans un demi cercle", *2* passe par A' et D'.

- **Scolie :** *Tx* // (BC).

- Les cercles *0* et *2*, les points de base A et E, la monienne (FAX), les parallèles *Tx* et (DA'), conduisent au théorème **1'** de Reim ; en conséquence, A',E et X sont alignés.

- Les cercles *0* et *2*, les points de base A et E, les moniennes (XEA') et (CAD'), conduisent au théorème **0** de Reim ; il s'en suit que (XC) // (A'D') ;
  par transitivité de la relation //, (FA') // (A'D') ;
  d'après le postulat d'Euclide, (FA') = (A'D').

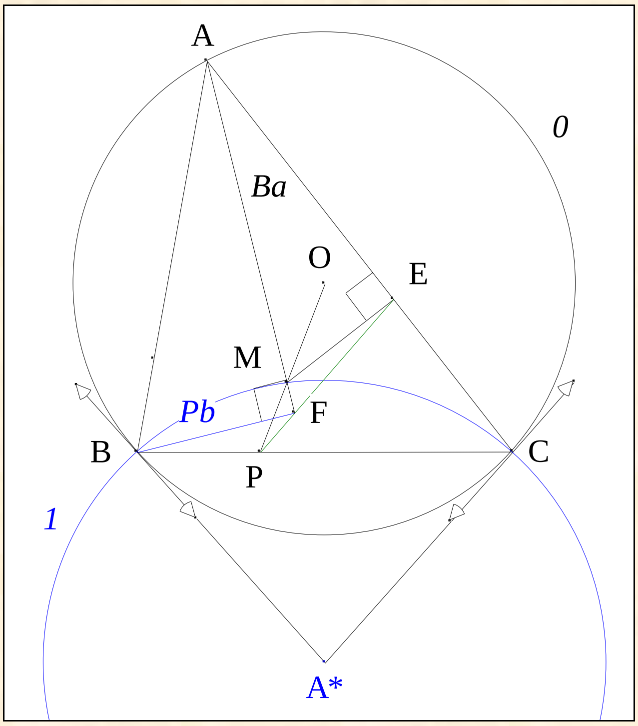
- **Conclusion :** A', F et D' sont alignés.

V. L'AUTEUR OU LA SEPTIÈME DROITE [15]

VISION

Figure :

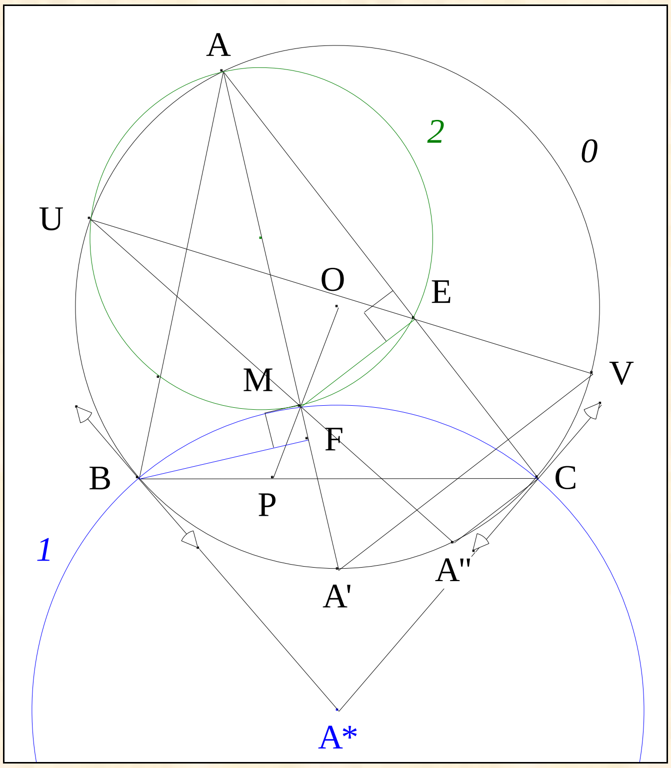
[15] Ayme J.-L. (07/2007)



Traits :	ABC	un triangle acutangle,
	0	le cercle circonscrit de ABC,
	O	le centre de *0*,
	A*	le A-sommet du triangle tangentiel de ABC,
	1	le cercle de centre A* passant par B,
	*B*a	la A-bissectrice de ABC,
	*P*b	la perpendiculaire à *B*a passant par B,
	F	le point d'intersection de *P*b et *Ba*,
	M	le premier point d'intersection de *B*a avec *1*,
	E	le pied de la perpendiculaire abaissée de M sur (AC)
et	P	le point d'intersection de (OM) et (BC)

Donné : P, F et E sont alignés.

VISUALISATION

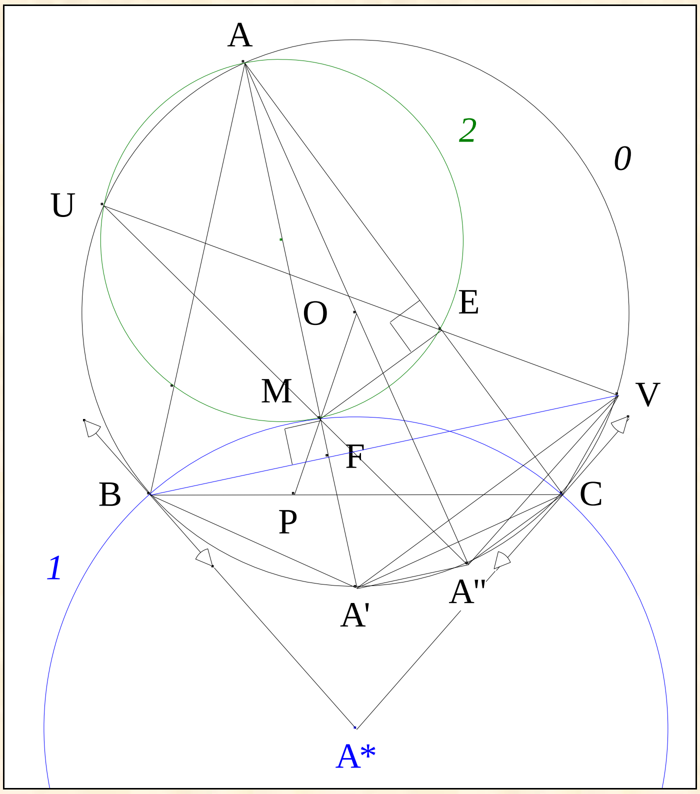


- Notons 2 le cercle de diamètre [AM] ; il passe par E ;
  U le second point d'intersection de *0* et *2*,
  A' le second point d'intersection de (AMF) avec *0*
  et A" le second point d'intersection de (UM) avec *0*.

- Les cercles *0* et *2*, les points de base A et U, les moniennes (A'AM) et (VUE), conduisent au théorème **0** de Reim ; il s'en suit que (A'V) // (ME).

- Les cercles *2* et *0*, les points de base U et A, les moniennes (MUA") et (EAC), conduisent au théorème **0** de Reim ; il s'en suit que (ME) // (A"C) ;
  par transitivité de la relation //, (A'V) // (A"C).

- **Conclusion partielle :** (A'V), (ME) et (A"C) sont parallèles entre elles.

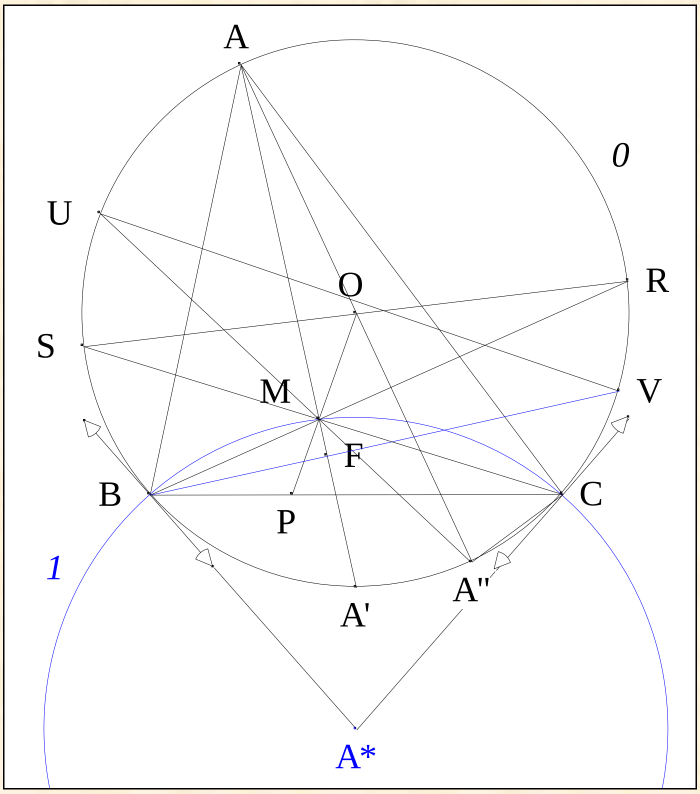


- Le quadrilatère A"CVA' étant un trapèze cyclique, est isocèle ; en conséquence, A"V = A'C ;
  A' étant le circumpied de la A-bissectrice de ABC, A'C = A'B ;
  par transitivité de la relation =, A"V = A'B ;
  en conséquence, (BV) // (A'A").

- D'après Thalès "Triangle inscriptible dans un demi cercle", (ME) ⊥ (AEC) ;
  en conséquence, A, O et A" sont alignés.

- D'après Thalès "Triangle inscriptible dans un demi cercle", (A'A") ⊥ (AA') ;
  par hypothèse, (AA') ⊥ (BF) ;
  d'après l'axiome IVa des perpendiculaires, (A'A") // (BF) ;
  par transitivité de la relation //, (BV) // (BF) ;
  d'après le postulat d'Euclide, (BV) = (BF).

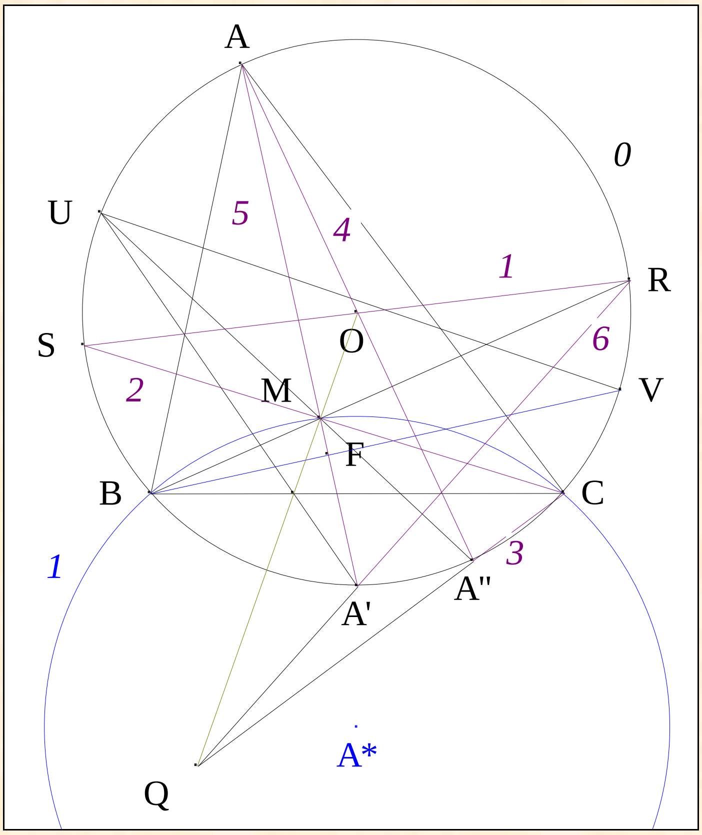
- **Conclusion partielle :** B, F et V sont alignés.



- Notons R, S les seconds points d'intersection resp. de (BM), (CM) avec *1*.

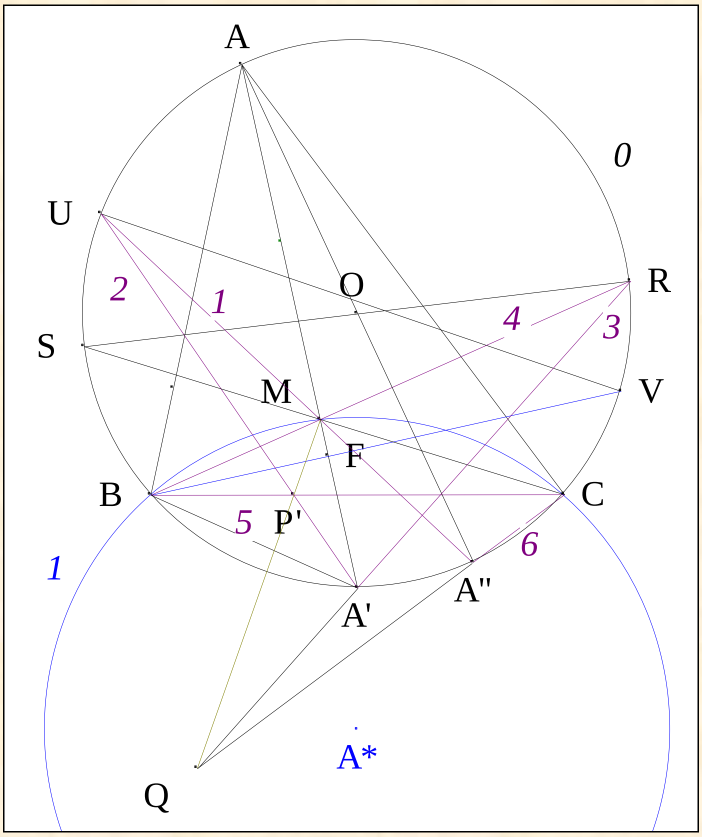
- Par définition, *0* et *1* sont orthogonaux.

- D'après Altshiller-Court "Deux cercles orthogonaux" (Cf. **E.** Annexe **3**), (RS) est une droite diamétrale de *0*.



- Notons Q le point d'intersection de (A'R) et (A"C).

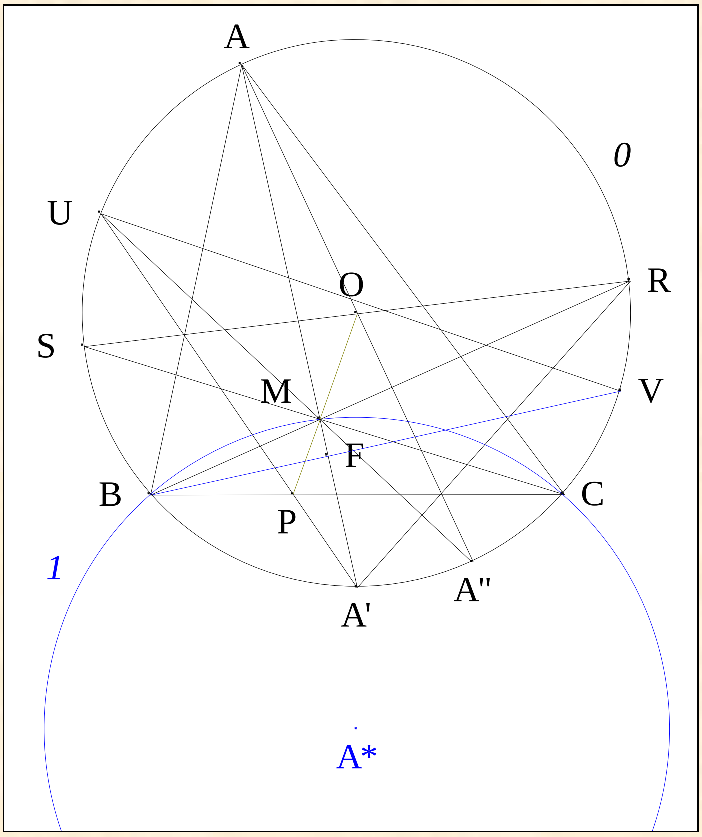
- D'après Pascal "Hexagramma mysticum" (Cf. **E.** Annexe **4**),
  (OMQ) est la pascale de l'hexagone cyclique RSCA"AA'R.



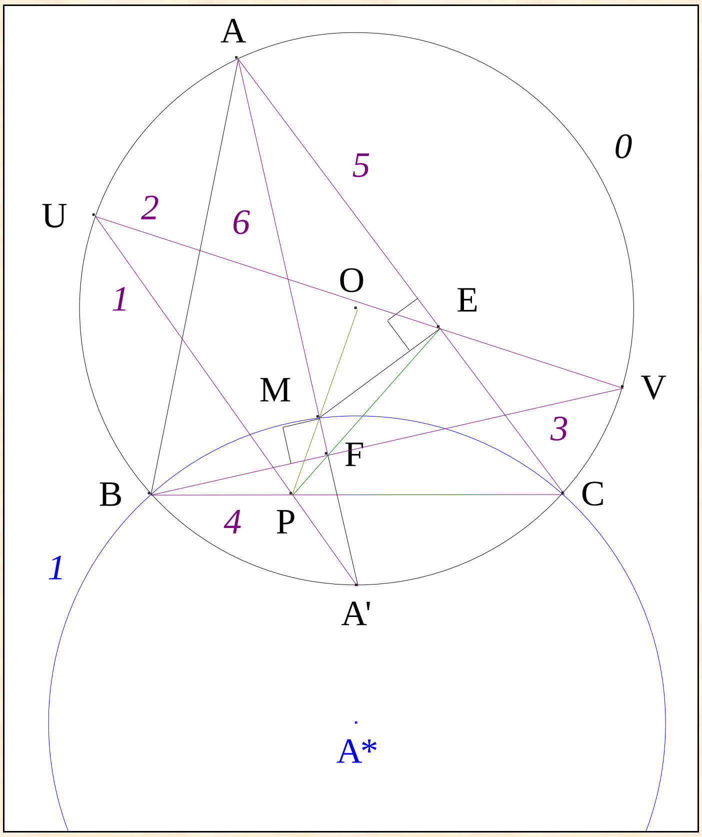
- Notons P' le point d'intersection de (UA') et (BC).

- D'après Pascal "Hexagramma mysticum" (Cf. **E.** Annexe **4**),
  (MP'Q) est la pascale de l'hexagone cyclique A"UA'RBCA".

- D'après l'axiome d'incidence **Ia**, O, M, P' et Q sont alignés.



- **Conclusion partielle :** P et P' sont confondus.



- D'après Pascal "Hexagramma mysticum" (Cf. **E.** Annexe **4**), (PEF) est la pascale de l'hexagone A'UVBCAA'.

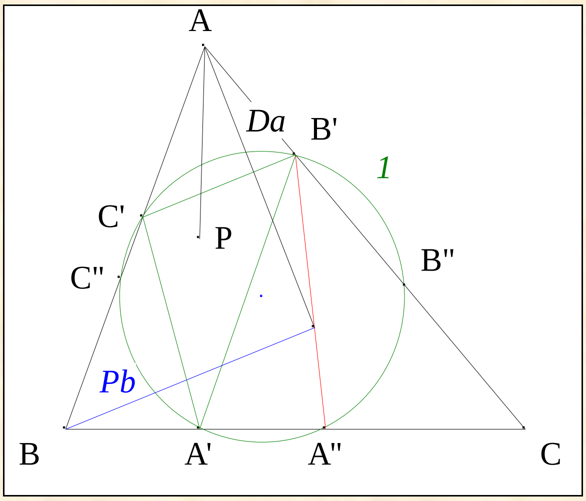
- **Conclusion :** P, F et E sont alignés.

Note historique : ce résultat apparaît comme une retombée inattendue d'un problème de Kostas Vittas [16]. L'auteur a identifié dans la figure, une nouvelle droite passant par F.

VI. UNE GÉNÉRALISATION DE L'AUTEUR [17]

VISION

Figure :



Traits :

	ABC	un triangle,
	P	un point,
	A'B'C'	le triangle P-pédal de ABC,
	1	le cercle circonscrit à A'B'C',
	A", B", C"	les seconds points d'intersection de *1* resp. avec (BC), (CA), (AB),
	*D*a	la A-isogonale de (AP)
et	*P*b	la perpendiculaire à *D*a passant par B.

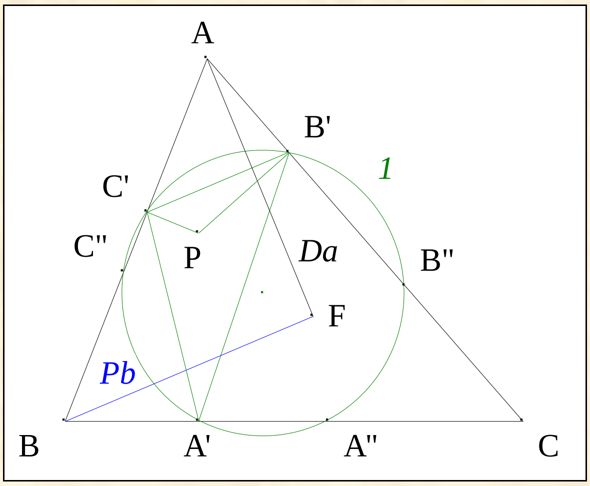
Donné : *D*a, *P*b et (A"B') sont concourantes.

VISUALISATION

---

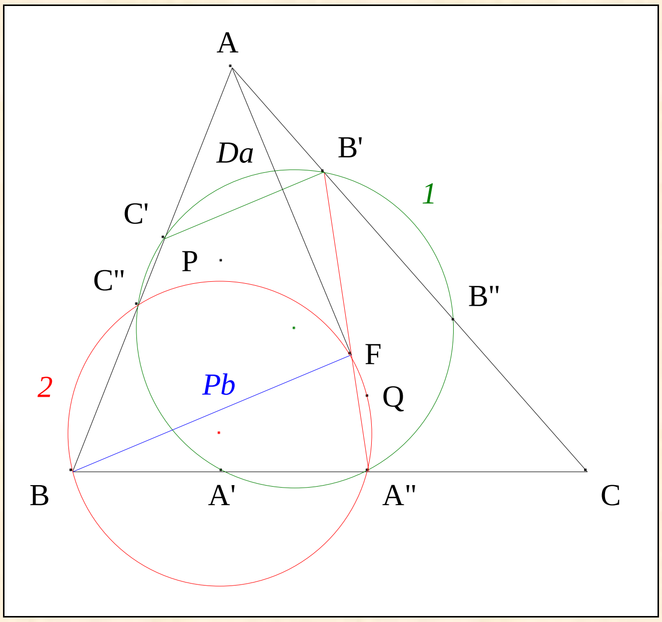
[16] Vittas K., A nice perpendicularity, *Mathlinks* du 23/07/2007

[17] Ayme J.-L. (2003)



- Notons F le point d'intersection de *D*a et *P*b.

- D'après Vigarié "Isogonale et perpendiculaire" (Cf. **E.** Annexe **5**), (B'C') ⊥ *D*a ;
  par hypothèse, *D*a ⊥ *P*b ;
  d'après l'axiome **IVa** des perpendiculaires, (B'C') // *P*b i.e. (B'C') // (BF).



- Notons Q l'isogonal de P relativement à ABC.

- D'après Mathieu "The pedal circle theorem" (Cf. **E.** Annexe **6**), le triangle A"B"C" est Q-pédal
  i.e. (QA") ⊥ (BC) , (QC") ⊥ (AB).

- D'après Thalès "Triangle rectangle inscriptible dans un demi cercle", B, Q, A" et C" sont cocycliques.

- Notons *2* ce cercle.

- Les cercles *1* et *2*, les points de base A" et C", la monienne (C'C"B), les parallèles (C'B') et (BF),
  conduisent au théorème **0'** de Reim ; en conséquence, B', A" et F sont alignés.

- **Conclusion :** *D*a, *P*b et (A"B') sont concourantes.

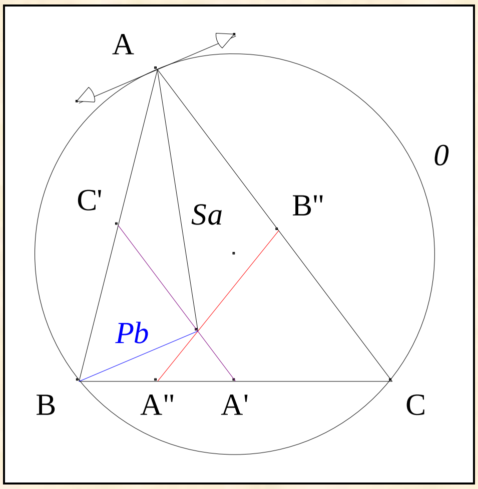
Commentaire : ce résultat est une généralisation de celui d'Arthur Lascases (**I. 1**.).

B. ANOTHER UNLIKELY CONCURRENCE

I. L'AUTEUR [18]

VISION

Figure :



Traits :	ABC	un triangle,
	0	le cercle circonscrit à ABC,
	*S*a	la A-symédiane de ABC,
	*T*a	la tangente à *0* en A,
	*P*b	la parallèle à *T*a passant par B,
	A', C'	les milieux resp. de [BC], [AB]
et	A", B"	les pieds resp. des A, B-hauteurs de ABC.

Donnés :	**(1)**	*S*a et *P*b se brisent sur (A'C')
	(2)	*S*a et *P*b se brisent sur (A"C").

Scolie : les quatre droites *S*a , *P*b, (A'C') et (A"B") sont concourantes.

II. LA CINQUIÈME DROITE

DE

WILSON STOTHERS [19]

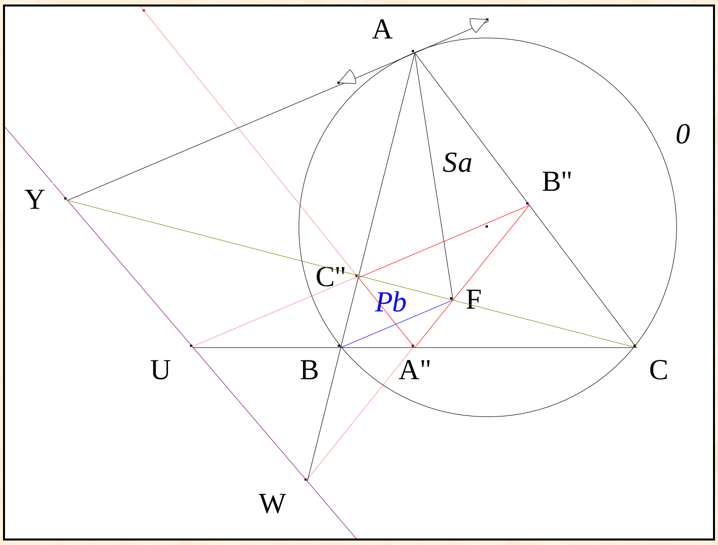
VISION

---

[18] Ayme J.-L., Another Unlikely Concurrence, *Crux Mathematicorum* (Canada) **8** (2003) 511-513 ;
G.G.G. vol. 10 (2007) ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/

[19] Stothers W., Unlikely concurrences, Message *Hyacinthos* # **11516** du 04/09/2005

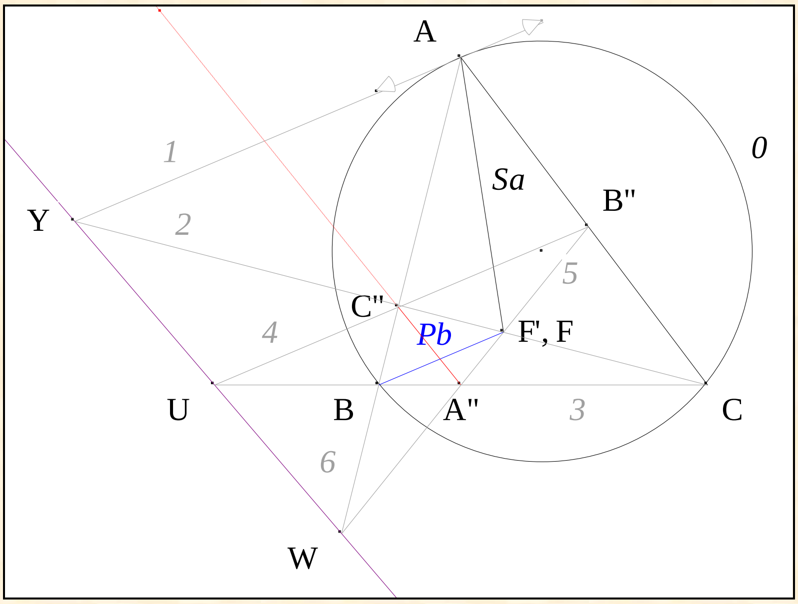
Figure :



Traits : ABC un triangle,
0 le cercle circonscrit à ABC,
*S*a la A-symédiane de ABC,
*T*a la tangente à *0* en A,
*P*b la parallèle à *T*a passant par B,
F le point d'intersection de *S*a et *P*b,
A"B"C" le triangle orthique de ABC.
U, V, W les points d'intersection resp. de (B"C") et (BC), de (C"A") et (CA), de (A"B") et (AB),
et Y le point d'intersection de *T*a avec (UVW).

Donné : (CY) passe par F.

VISUALISATION



- **Scolies :** **(1)** (UVW) est l'axe orthique de ABC i.e. l'arguésienne de ABC et A"B"C"

(2) *T*a est le support du A-côté du triangle tangentiel de ABC
(3) (AY), (B"C"U) et (BF) sont parallèles entre elles.

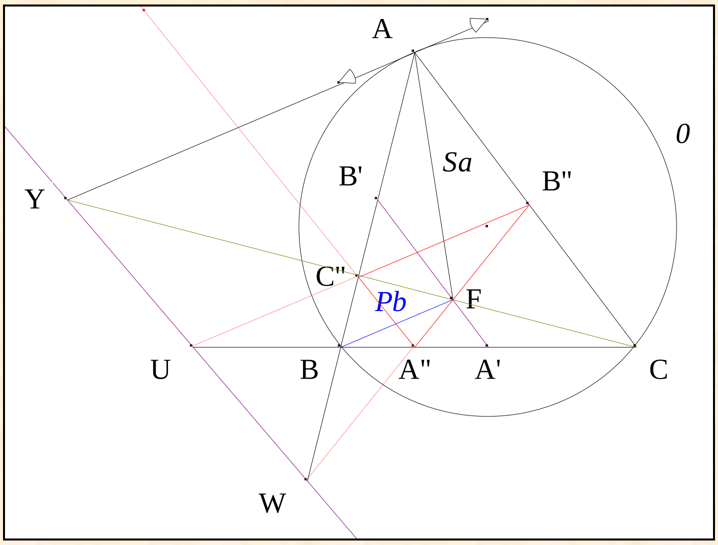
- D'après **B. I.,** *S*a et *P*b se brisent sur (A"B") i.e. F est sur (A"B").

- Notons F' le point d'intersection de (A"B"W) et (CY).

- D'après "Le théorème de Pappus" (Cf. **E.** Annexe **2**),
  (1) (BF') est la pappusienne de l'hexagone AYCUB"WA
  (2) (BF') // (BF) ;
  en conséquence, F' et F sont confondus.

- **Conclusion :** (CY) passe par F.

Scolie : le point F

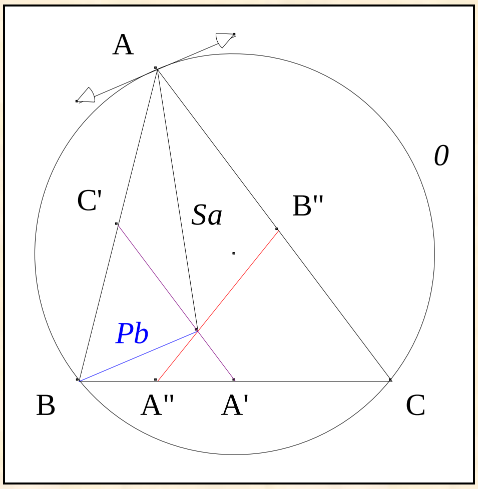


F est le point de concours des cinq droites *B*a, *P*b, (A'C'), (A"B") et (CY).

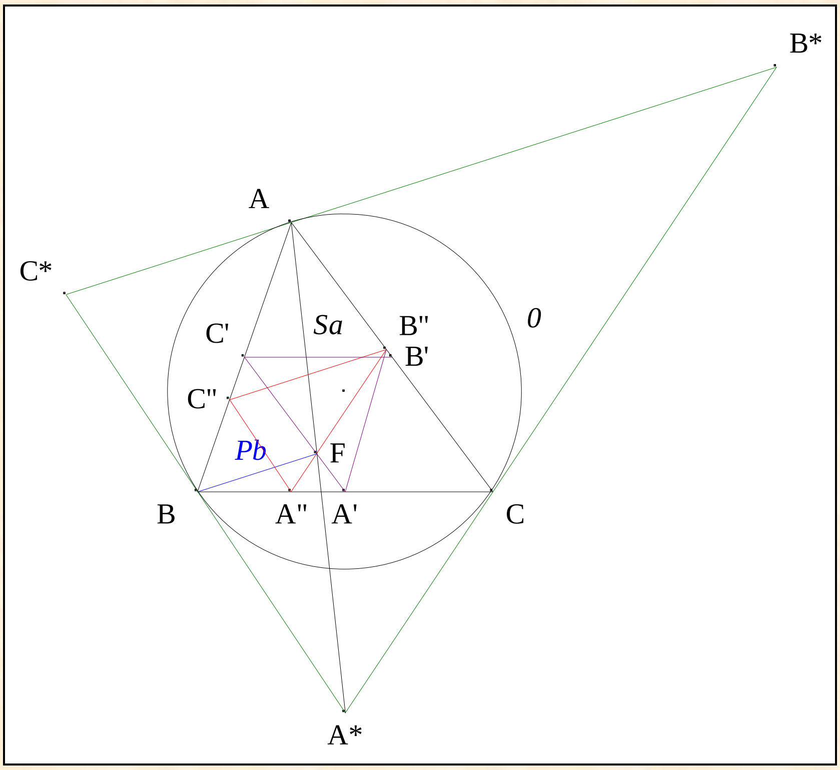
C. UNE SYMÉTRIE TRIANGULAIRE BRISÉE

À PARTIR DE

ANOTHER UNLIKELY CONCURRENCE



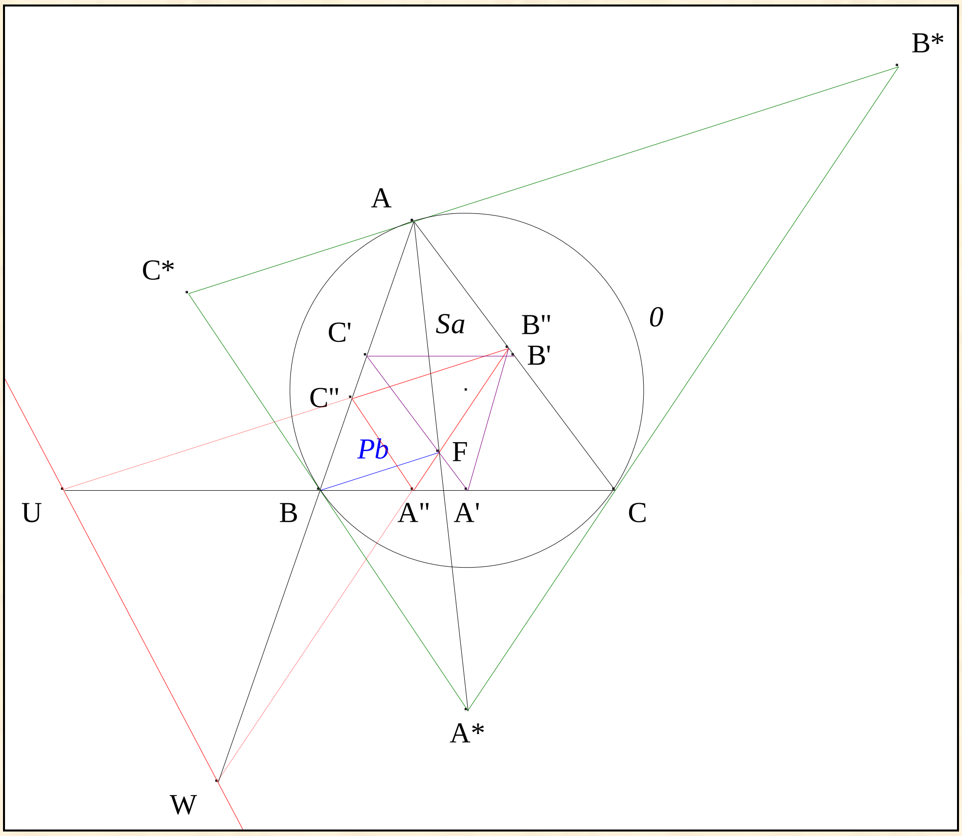
La figure de "Another unlikely concurrence" qui s'offre à notre regard, révèle une symétrie triangulaire brisée.



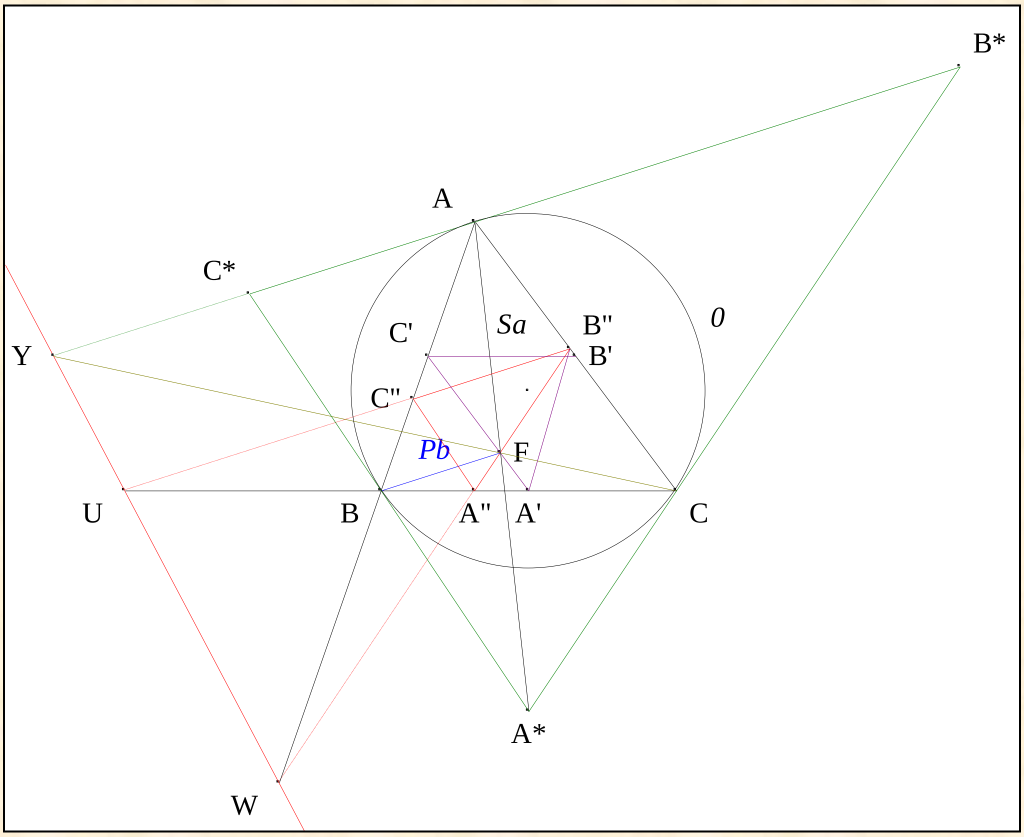
Pour rétablir cette symétrie triangulaire, nous commençons par reconsidérer les triangles orthique A"B"C", médian A'B'C' et tangentiel A*B*C* du triangle ABC. Ensuite, nous avons en mémoire que A"B"C" et A'B'C' sont resp. deux triangles H, G-céviens de ABC, H étant l'orthocentre et G le point médian de ABC, et que A*B*C* est le triangle anticévien de ABC dont le centre de perspective est le cross-cevian point de H et G i.e. le point de Lemoine K de ABC. En fin, nous savons que la droite (AA*) passe par K et par le point d'intersection F de (A'C') et (A"B"), et que (BF) est parallèle à (B*C*). [20]

---

[20] Ayme J.-L., The cross-cevian point of P and Q, G.G.G. vol. **3** ; http://jl.ayme.pagesperso-orage.fr/



Pour être plus complet, Wilson Stothers considère l'axe orthique (UVW) de A''B''C'' et ABC.



Finalement, Stothers observe que l'intersection de (UVW) et de (B*C*) est sur la droite (CF).

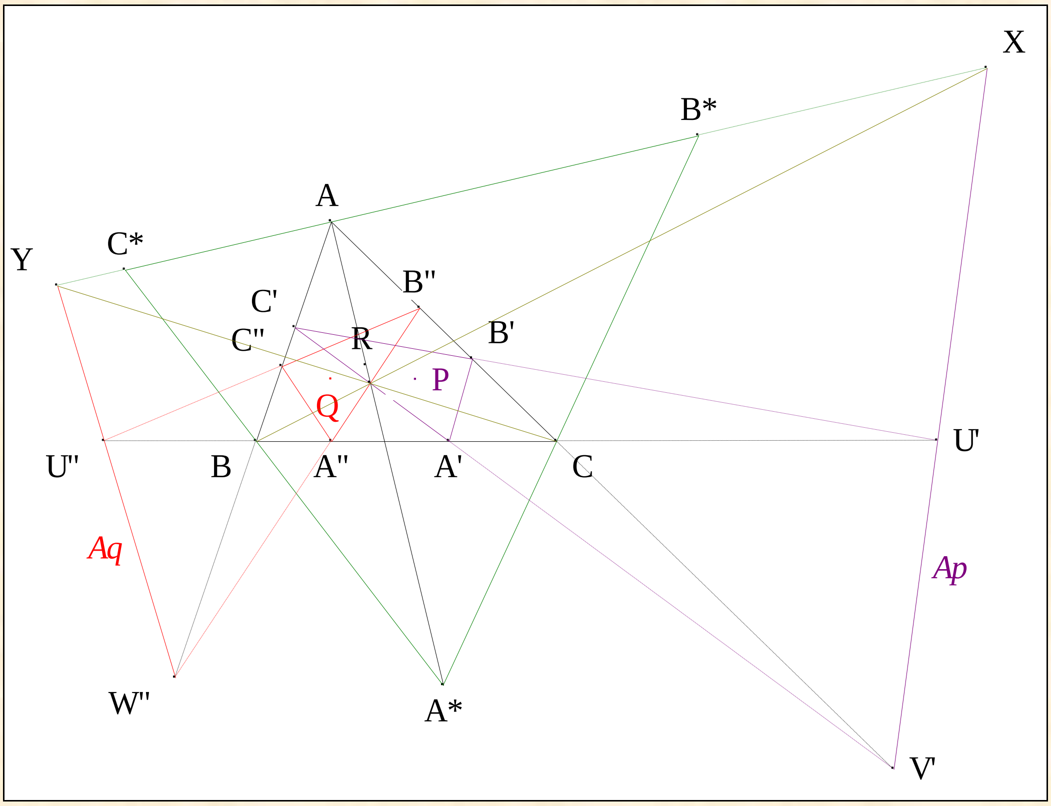
D. L'IDÉE FÉDÉRATRICE

DE

WILSON STOTHERS [21]

VISION

Figure :

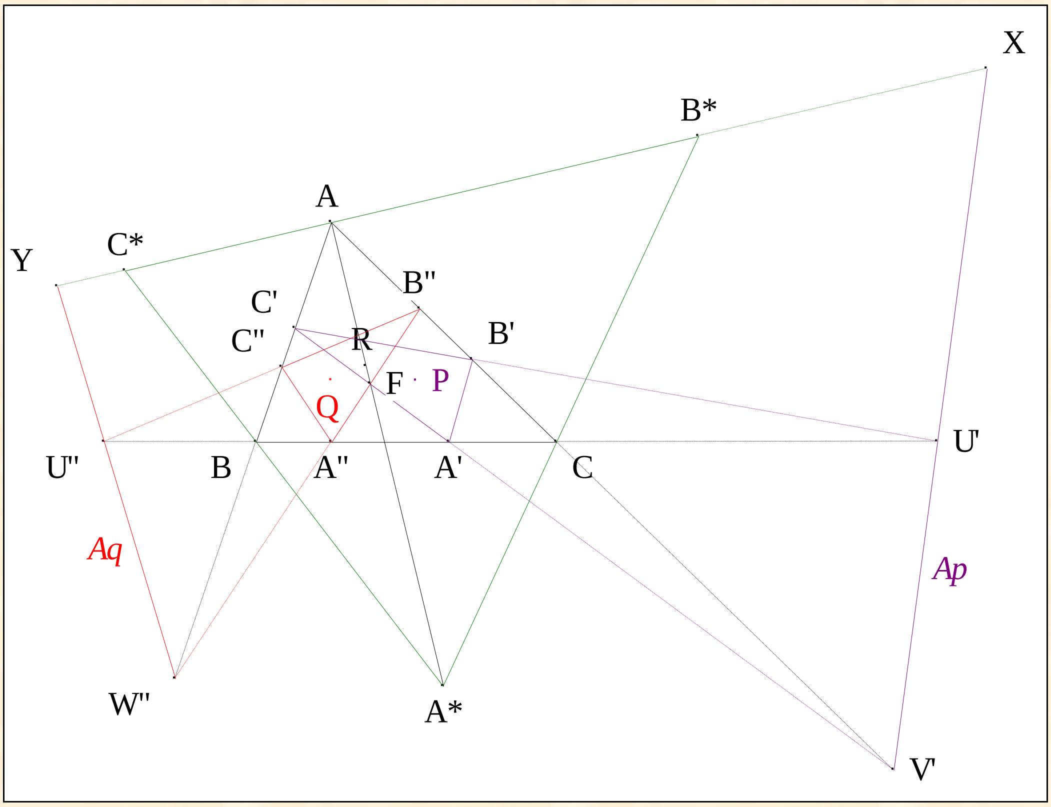


Traits : ABC un triangle,
P, Q deux points,
A'B'C', A"B"C" les triangles resp. P, Q-céviens de ABC,
R le cross-cevian point de P et Q relativement à ABC,
A*B*C* le triangle R-anticévien relativement à ABC,
*A*p, *A*q les arguésiennes de A'B'C' et ABC, de A"B"C" et ABC,
et X, Y les points d'intersection de (B*C*) resp. avec *A*p, *A*q.

Donné : (A'C'), (A"B"), (AA*), (CX) et (CY) sont concourantes.

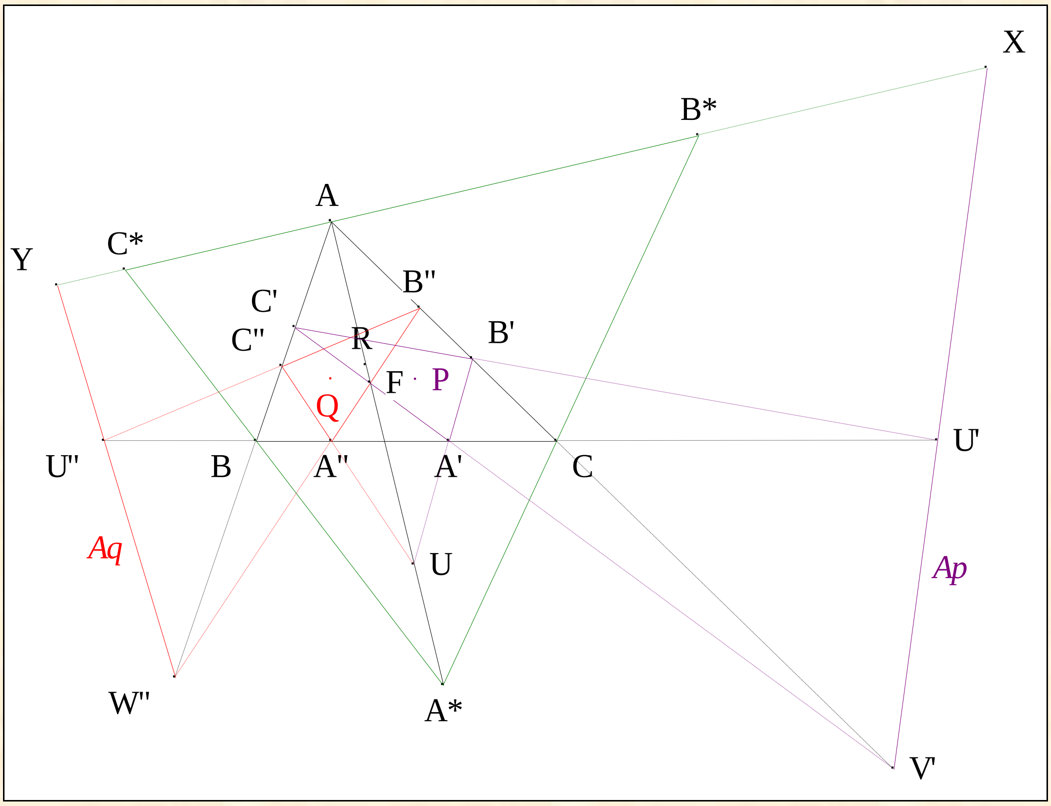
VISUALISATION

[21] Stothers W. (08/11/46-) est professeur à l'université de Glasgow (G.-B.)



- Notons F le point d'intersection de (A'C') et (A"B").

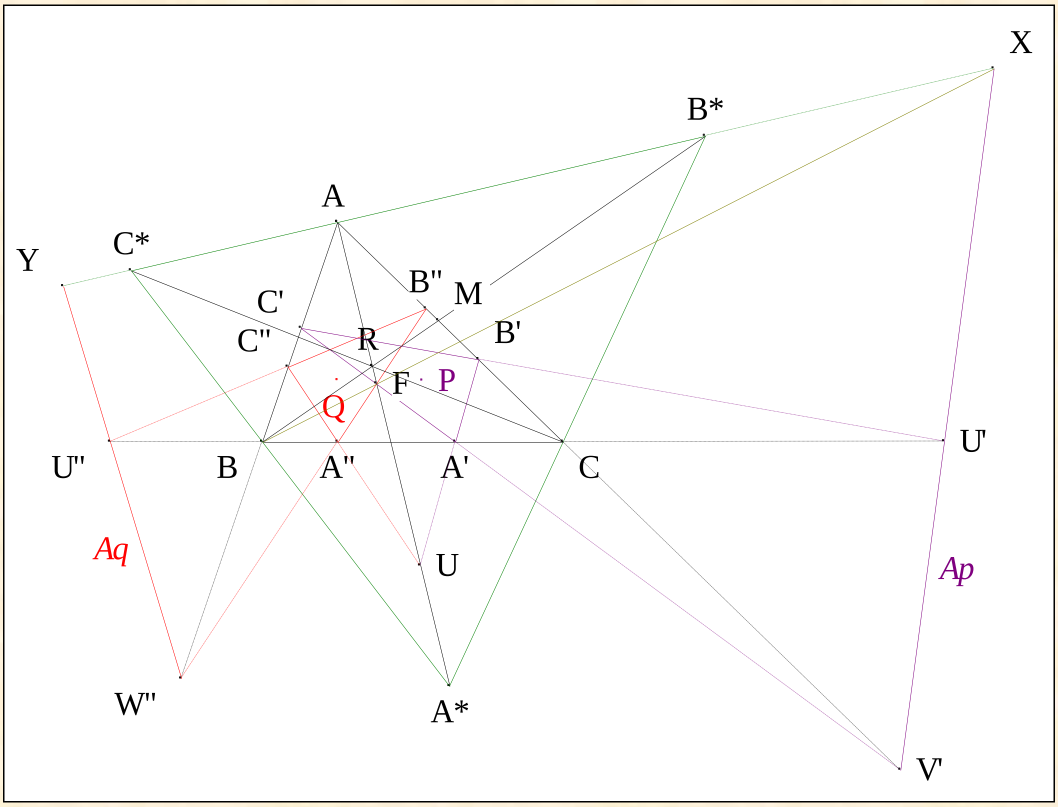
- D'après "The cross-cevian point of P and Q" [22], **(1)** A, R, A* sont alignés
  (2) (A'C'), (A"B") et (AA*) sont concourantes en F.



[22] Ayme J.-L., The cross-cevian point of P and Q, G.G.G. vol. **3** ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/

- Notons U le point d'intersection de (A'B') et (A"C").

- D'après "Les deux points de Schroeter" [23], (A'B'), (A"C") et (AA*) sont concourantes en U.



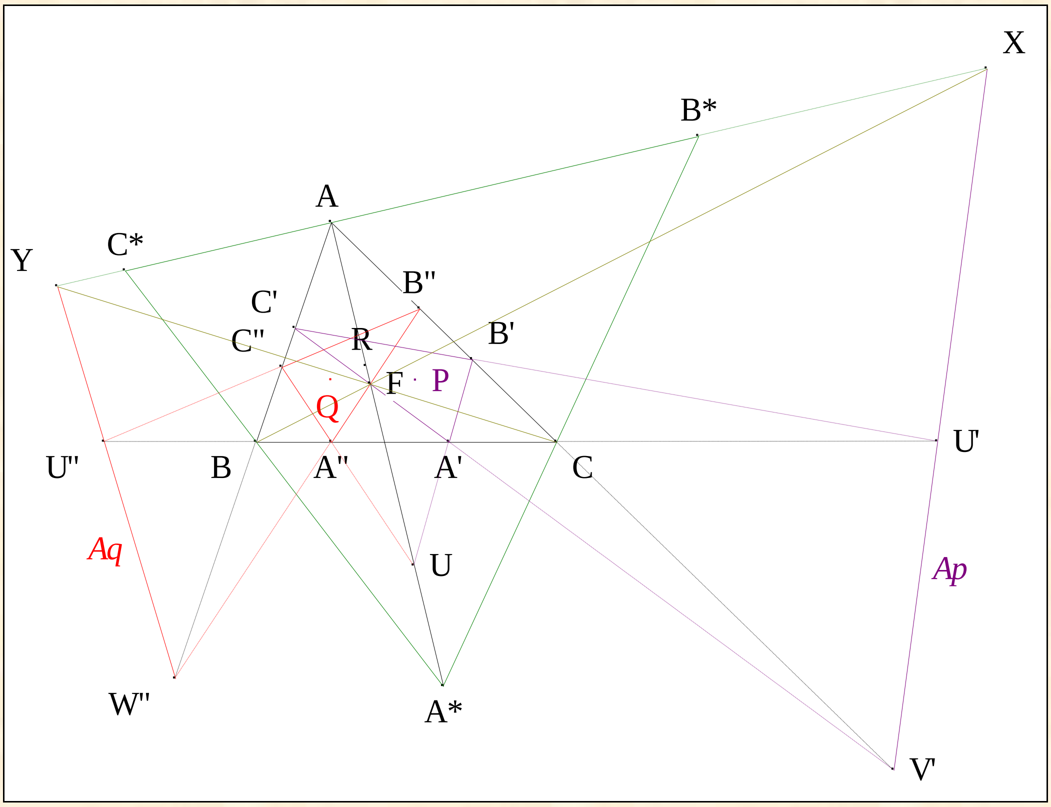
- D'après Pappus "Diagonales d'un quadrilatère" (Cf. **E.** Annexe **7**) appliqué
  au quadrilatère AC'PB', le quaterne (B, C, A', U') est harmonique ;
  en conséquence, le pinceau (V' ; B, C, A', U') est harmonique.

- Notons M le point d'intersection de (BRB') et (AC).

- D'après Pappus "Diagonales d'un quadrilatère" (Cf. **E.** Annexe **7**) appliqué
  au quadrilatère ARCB*, le quaterne (B, M, R, B*) est harmonique ;
  en conséquence, le pinceau (A ; B, M, R, B*) est harmonique.

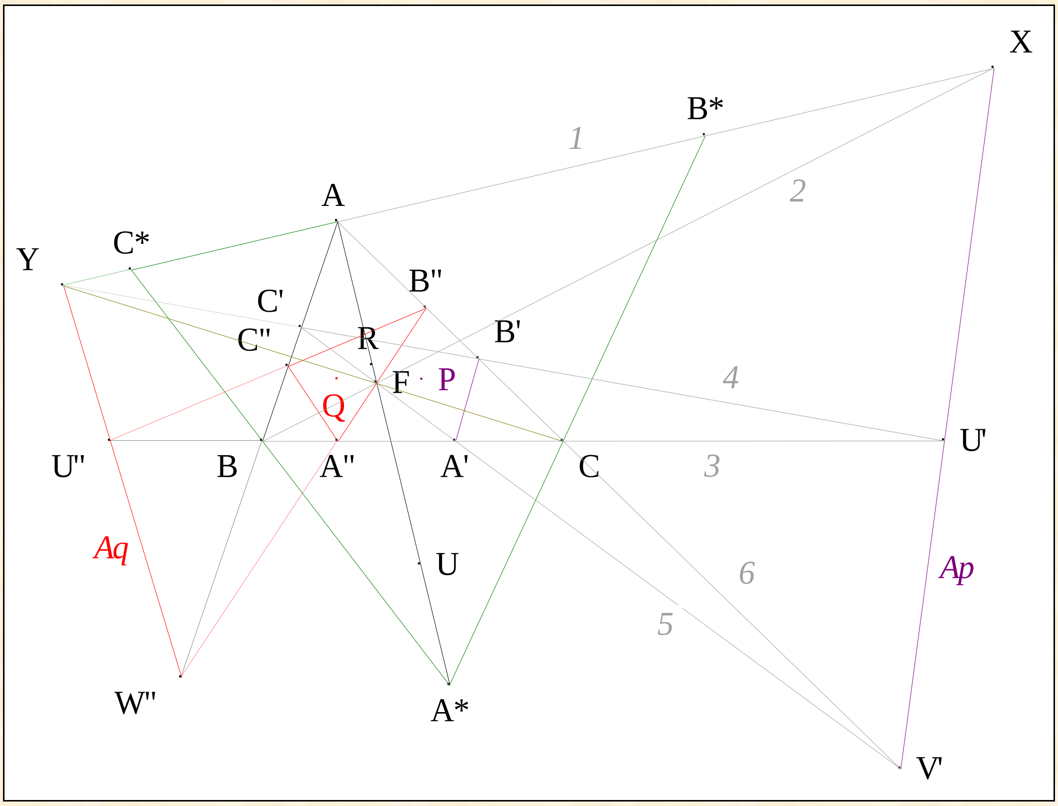
- **Conclusion partielle :** les deux pinceaux harmoniques ayant le rayon (V'CMA) en commun,
  B, F et X sont alignés.

[23] Ayme J.-L., Les deux points de Schroeter, G.G.G. vol. **2**, p.8-10 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/



- Mutatis mutandis, nous montrerions que C, F et Y sont alignés.
- **Conclusion :** (A'C'), (A"B"), (AA*), (CX) et (CY) sont concourantes en F.

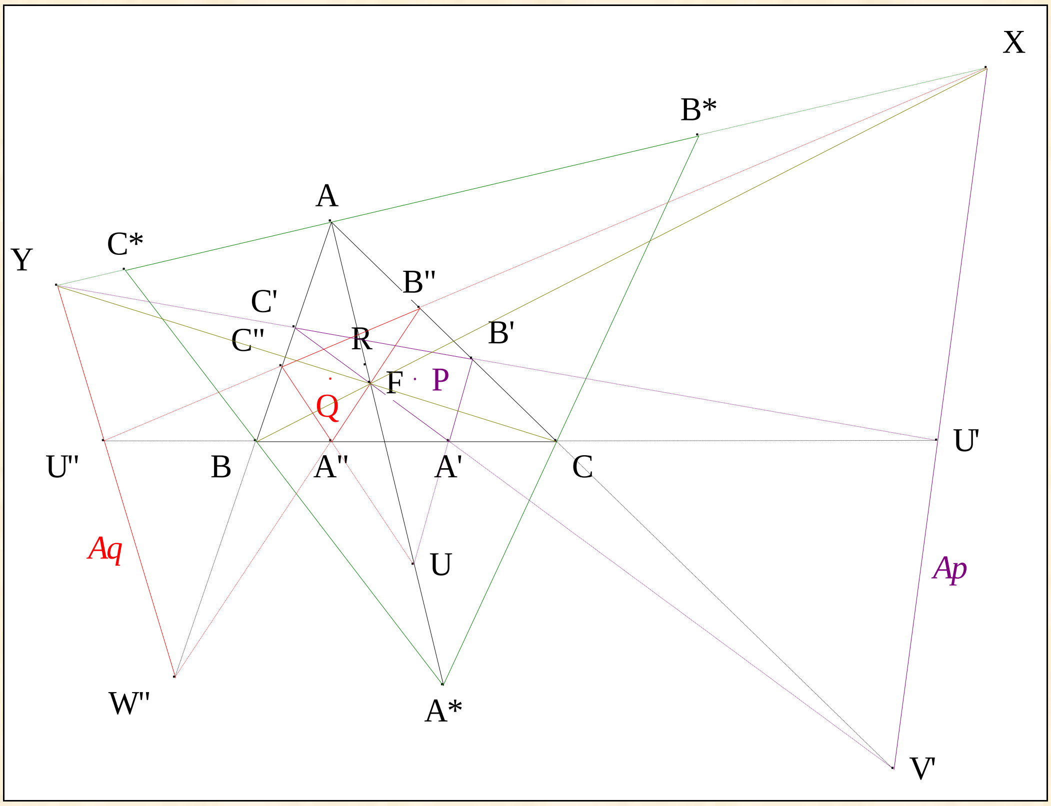
Scolies : **(1)** quatre points alignés



- D'après Pappus "La proposition 139" [24], (YFC) est la pappusienne de l'hexagone sectoriel AXBU'C'V'A ;
  en conséquence, (B'C'U') passe par Y.

- **Conclusion :** B', C', U' et Y sont alignés.

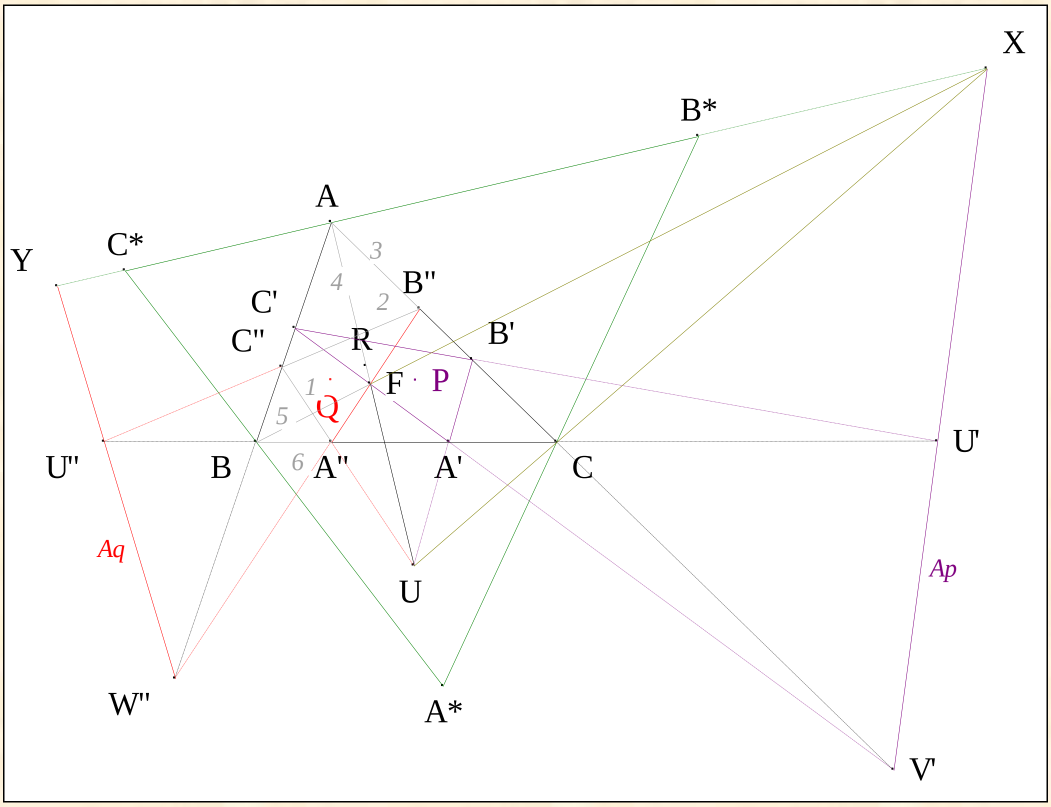
(2) Quatre autre points alignés



- **Conclusion :** mutatis mutandis, nous montrerions que B", C", U" et X sont alignés.

(3) Trois points alignés

24 Ayme J.-L., Une rêverie de Pappus, G.G.G. vol. **6**, p.9 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/

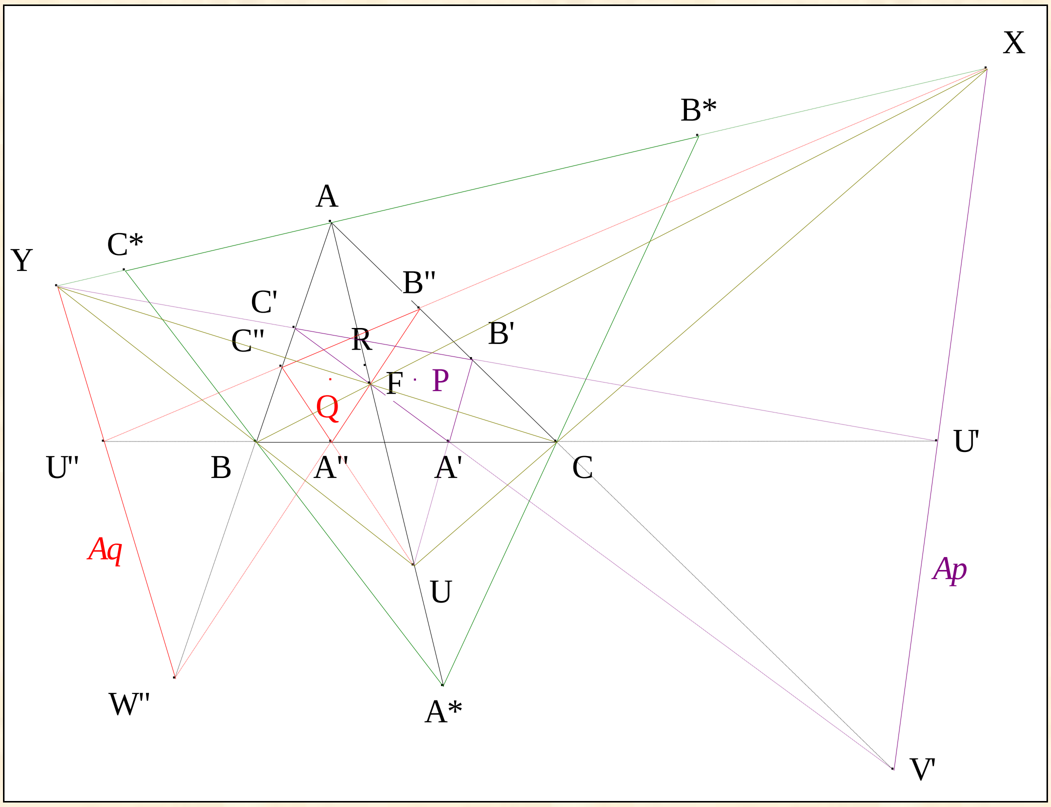


- D'après Pappus "La proposition 139" [25], (UXC) est la pappusienne de l'hexagone sectoriel A"C"B"AFBA".

- **Conclusion :** U, C et X sont alignés.

(4) Trois autres points alignés

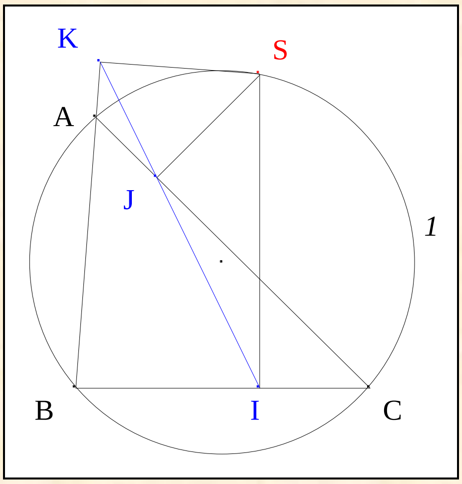
[25] Ayme J.-L., Une rêverie de Pappus, G.G.G. vol. **6**, p. 9 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/



- **Conclusion :** mutatis mutandis, nous montrerions que U, B et Y sont alignés.

E. ANNEXE

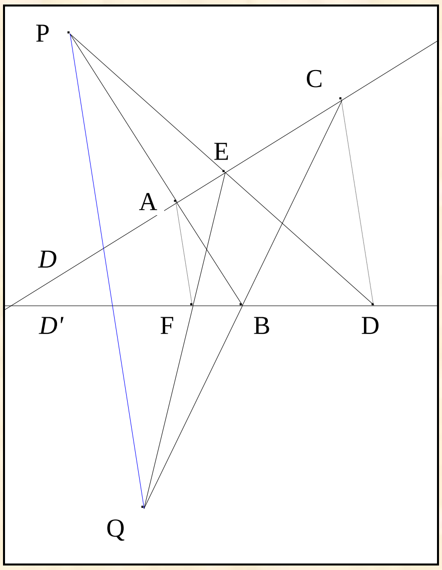
1. La droite de Simson-Wallace [26]



Traits :		ABC	un triangle non rectangle,
		1	le cercle circonscrit à ABC,
		S	un point
	et	I,J,K	les pieds des perpendiculaires abaissées de S resp. sur (BC), (CA) et (AB).

Donné : S est sur *1* *si, et seulement si,* (IJK) est une ménélienne de ABC.

2. Le théorème de Pappus



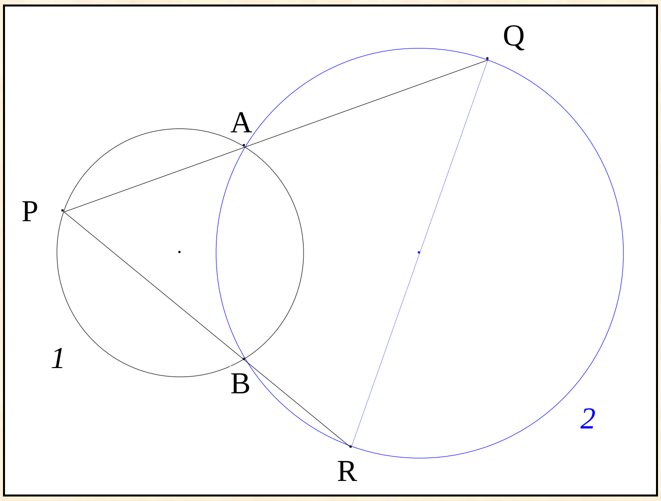
Traits :		*D*, *D'*	deux droites,
		ABCDEFA	un hexagone de Pappus tel que (CD) soit parallèle à (AF)
	et	P, Q	les points d'intersection resp. de (AB) et (DE), (BC) et (EF).

Donné : (PQ) est parallèles à (CD).

---

[26] Wallace, *Leybourne's* mathem. repository (old series) **2** (1798) 111

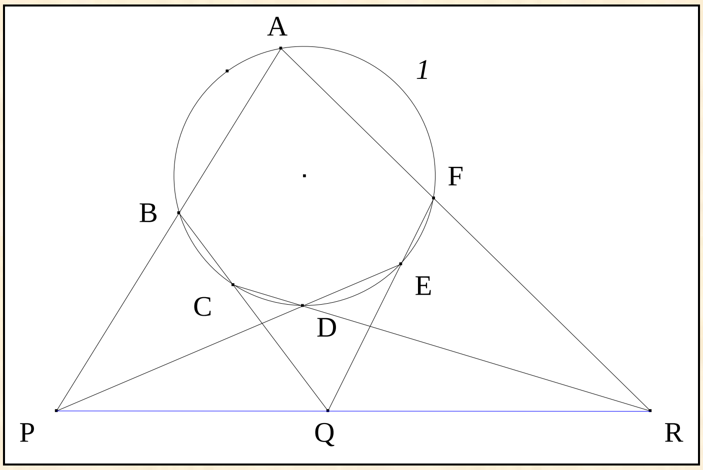
3. Deux cercles orthogonaux [27]



Traits : *1, 2* deux cercles sécants,
A, B les deux points d'intersection de *1* et *2*,
P un point de *1*
et Q, R les seconds points d'intersection resp. de (PA), (PB) avec *2*.

Donné : *1* et *2* sont orthogonaux *si, et seulement si,* (QR) est une droite diamétrale de *2*.

4. Hexagramma mysticum [28]

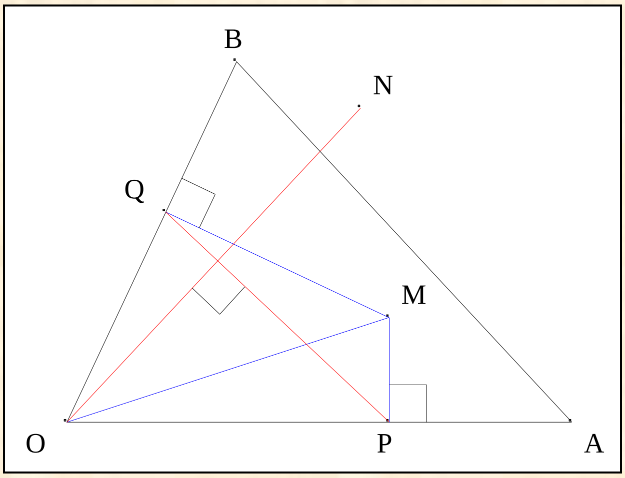


Traits : *1* un cercle,
ABCDEF un hexagone tels que les points A, B, C, D, E soient sur *1*
et P, Q, R les points d'intersection de (AB) et (DE), (BC) et (EF), (CD) et (FA).

Donné : F est sur *1* *si, et seulement si,* P, Q et R sont alignés.

5. Isogonale et perpendiculaire [29]

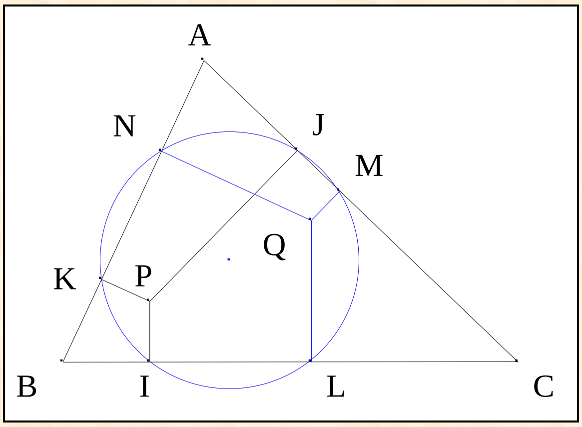
[27] Altshiller-Curt N., Note on the orthocentric tetrahedron, *American Mathematical Monthly* (**34**) 500-501
[28] Pascal B. (1640)
[29] Vigarié E., *Journal de Mathématiques Élémentaires* (1885) 33-



Traits :	OAB	un triangle,
	M	un point,
	P, Q	les pieds des perpendiculaires abaissées de M resp. sur (OA), (OB)
et	N	un point.

Donné : (ON) est l'isogonale de (OM) par rapport à (OA) et (OB)
si, et seulement si,
(ON) est perpendiculaire à (PQ).

6. The pedal circle theorem [30]

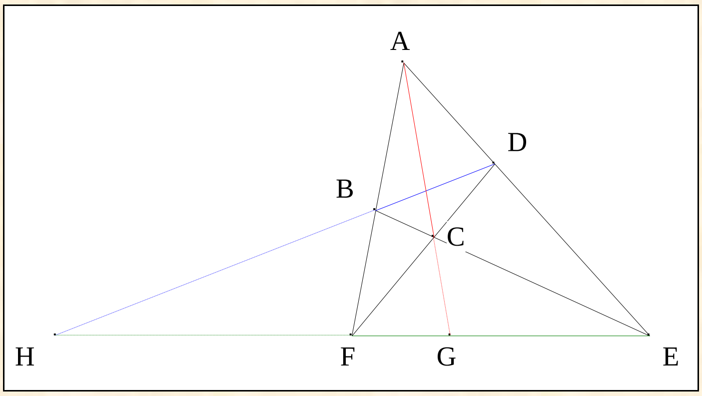


Traits :	ABC	un triangle,
	P	un point non situé sur le cercle circonscrit de ABC,
	I, J, K	les pieds des perpendiculaires abaissées de P resp. sur (BC), (CA), (AB),
	Q	l'isogonal de P relativement à ABC
et	L, M, N	les pieds des perpendiculaires abaissées de Q sur (BC), (CA), (AB).

Donné : I, J, K, L, M et N sont cocycliques.

7. Diagonales d'un quadrilatère [31]

[30] Mathieu J.J.
[31] Pappus, *Collections*, Livre **7**, proposition 131



Traits : ABCD un quadrilatère,
E, F les points d'intersection de (AD) et (BC), de (AB) et (CD),
G, H le point d'intersection de (AC) et (EF), de (BD) et (EF).

Donné : le quaterne (E, F, G, H) est harmonique.