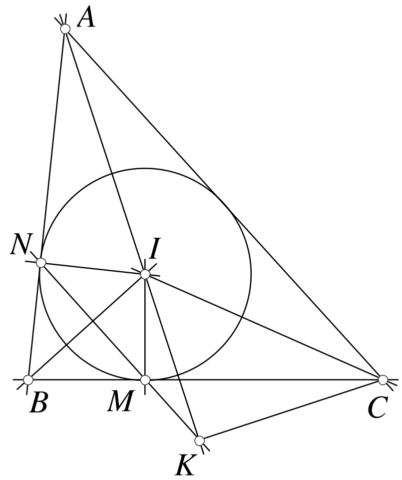
Problema 828 de *triánguloscabri*. *Supongamos que M y N son los puntos de tangencia de la circunferencia inscrita con los lados BC y BA del triángulo ABC. Sea K el punto de intersección de la bisectriz del ángulo A con la recta MN. Demostrar que el ángulo AKC es recto.*

Referencia desconocida.



Solución de Francisco Javier García Capitán. Daremos tres soluciones al problema, una con coordenadas baricéntricas, otra con números complejos (que también usa inversión), y una tercera que usa inversión y polares.

Coordenadas baricéntricas

En coordenadas baricéntricas tenemos $I = (a : b : c)$, $A = (1 : 0 : 0)$, $M = (0 : s - c : s - b)$ y $N = (s - b : s - a : 0)$. Así tenemos las rectas $AI : cy - bz = 0$ y $MN : (s - a)x - (s - b)y + (s - c)z = 0$. Entonces, las rectas MN y AI se encuentran en el punto $K = (-(b - c) : b : c)$.

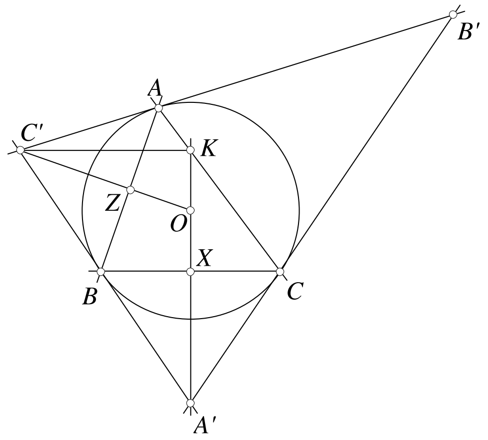
Recordemos que la bisectriz exterior del ángulo A, perpendicular a la bisectriz interior AI pasa por los excentros $I_b = (a : -b : c)$ e $I_c = (a : b : -c)$, tiene ecuación $cy + bz = 0$, y su punto del infinito es $J = (b - c : -b : c)$. Para razonar que KC es perpendicular a AI, bastará comprobar que J pertenece a la recta CK, lo cual se deduce de que se cumple

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ b-c & -b & -c \\ b-c & -b & c \end{vmatrix} = 0.$$

Números complejos

Para resolver el problema con números complejos, lo reescribimos considerando como triángulo de referencia el formado por los puntos de contacto con la circunferencia inscrita, convirtiéndose ésta en la circunferencia inscrita y el triángulo ABC original en el triángulo tangencial.

828a. *Sean ABC un triángulo y $A'B'C'$ su triángulo tangencial. Si la mediatriz de BC corta a AC en K, entonces la recta $C'K$ es perpendicular a dicha mediatriz.*



Como es habitual en las soluciones con números complejos, representamos con letras minúsculas los números complejos afijos de los correspondientes puntos con letras mayúsculas. El origen corresponde al circuncentro y la circunferencia circunscrita es la circunferencia unidad

Si X es el punto medio de BC, será $x = \frac{1}{2}(b+c)$ y $k = tx$ para cierto número real t. Como K está sobre la recta CA, debe ser

$$\begin{vmatrix} 1 & a & \bar{a} \\ 1 & c & \bar{c} \\ 1 & k & \bar{k} \end{vmatrix} = 0.$$

Por otro lado, como a, b, c están sobre la circunferencia unidad, tenemos $\bar{a} = \frac{1}{a}$, $\bar{b} = \frac{1}{b}$, $\bar{c} = \frac{1}{c}$. Sustituyendo y desarrollando, podemos despejar

$$t = \frac{2b(c+a)}{(a+b)(b+c)} \Rightarrow k = \frac{b(c+a)}{a+b}.$$

Ahora, C' es el inverso del punto medio Z de A y B. Entonces,

$$c' = \frac{1}{\bar{z}} = \frac{1}{\frac{\bar{a}+\bar{b}}{2}} = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} = \frac{2ab}{a+b}.$$

Para comprobar que $C'K$ es perpendicular a KO basta comprobar que el cociente $\lambda = (k - c')/k$ es imaginario puro. Como

$$k - c' = \frac{b(c+a)}{a+b} - \frac{2ab}{a+b} = \frac{b(c-a)}{a+b} \Rightarrow \lambda = \frac{k-c'}{k} = \frac{c-a}{c+a},$$

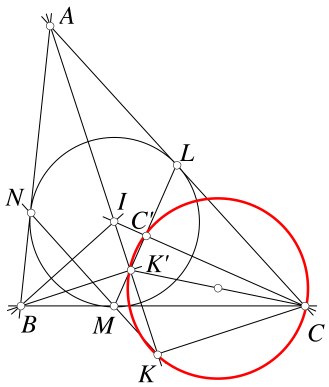
que es imaginario puro, ya que

$$\bar{\lambda} = \frac{\frac{1}{c} - \frac{1}{a}}{\frac{1}{c} + \frac{1}{a}} = \frac{a-c}{a+c} = -\lambda.$$

Inversión

Hacemos uso de la propiedad de la inversión por la que si X, X' e Y, Y' son pares de puntos inversos, el cuadrilátero $XX'YY'$ es cíclico.

Por un lado, si L el punto de contacto de la circunferencia inscrita con el lado CA y C' es el punto medio de LM entonces, C' es el inverso de C respecto de dicha circunferencia.



Por otro lado, K está sobre MN, que es polar de B, y sobre la recta AI, polar punto del infinito del diámetro perpendicular a AI. Por tanto, la polar de K será la perpendicular por B a AI. Sea K' el inverso de K, que estará sobre esta perpendicular. Como los puntos $CC'KK'$ son concíclicos y el ángulo $K'C'C$ es recto, $K'C$ es un diámetro de la circunferencia $CC'KK'$, y el ángulo $K'KC$ también es recto.

Hagamos la observación de que, como corolario, al ser por tanto KC la polar de K' y ésta pasar por C, la polar de C pasa por K', es decir, K' está sobre la recta LM.