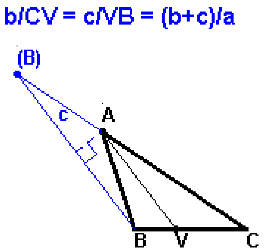
Problema 829

Construir un triángulo dado en posición los puntos B, C, y Va (pie de la bisectriz interna de A), y conocido b+c.

Resuelto por JULIÁN SANTAMARÍA TOBAR profesor de Dibujo del IES La Serna de Fuenlabrada

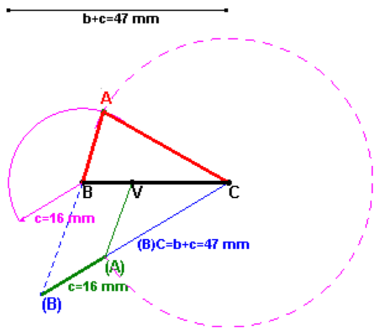
El problema se va a resolver por tres métodos, obteniendo parejas de datos equivalentes a los lados b y c, por el triángulo transformado de la suma de lados b+c, y por la combinación de dos cuaternas armónicas.

<u>Primer método, resolución obteniendo parejas de datos equivalentes a los lados b y c</u>



Según el teorema de la bisectriz, los lados b y c, son proporcionales a los segmentos CV y VB en los que el pie V de la bisectriz del vértice A, divide al lado a; por lo tanto, se conoce la relación de los lados b/c.

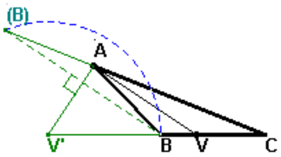
Las parejas de datos (b/c) y (b+c) son equivalentes a la pareja b y c.



<u>Resolución del ejercicio</u>

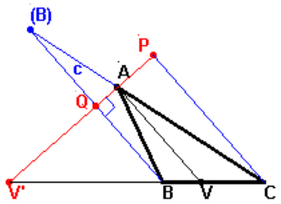
Como b/CV = c/VB = (b+c)/a, mediante una cuarta proporcional se obtienen los lados b y c. Se reduce el problema a resolver un triángulo dados los tres lados.

<u>Segundo método, por el triángulo B(B)C transformado de la suma de lados b+c</u>



En el problema resuelto, se deduce por una parte, que al hallar el punto (B) simétrico del vértice B con respecto a la bisectriz exterior del vértice A, se obtiene el segmento conocido C(B), que es la suma (b+c). Por otra parte, al considerar que la cuaterna CBVV’ es armónica y al conocerse tres puntos se puede obtener el cuarto. Con lo cual, se deduce que por el pie obtenido V’ pasa el eje de simetría que transforma el punto B el su simétrico (B), por lo tanto, B y (B) están en un arco cuyo centro es el punto V’.

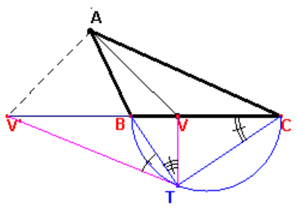
<u>Justificación de que la cuaterna CBVV’, es armónica</u>



Una razón doble es el cociente de dos razones simples, y cuando la razón doble de una cuaterna es -1, se llama armónica.

Sea la cuaterna PQAV’ que proviene de la proyección paralela a la bisectriz interior de la cuaterna CBVV’ sobre la bisectriz exterior. La cuaterna PQAV’ está compuesta por dos ternas (PQA) y (PQV’), sus razones simples, (o sea, las razones de homotecia cuyos centros de homotecia son, el punto A en la terna PQA, y el V’ en la terna PQV’), son las siguientes: de (PQA) = CP/-Q(B) y de (PQV’) = CP/BQ. Como Q(B) = BQ por tener una relación de simetría, la razón doble es el cociente de estas dos razones simples [CP/-Q(B)] / [CP/BQ] = -1, por lo tanto, la cuaterna PQAV’ es armónica. Al proyectar una cuaterna con un haz de rayos sobre otra recta, se conserva la razón doble, por consiguiente, la cuaterna BCVV’ es armónica.

También se puede deducir, en un triángulo ABC, que el haz de rectas que pasan por la cuaterna CBVV’ y concurren en el vértice A. forman el haz armónico A(CBVV’), y viceversa, si un haz tiene dos rayos perpendiculares AV y AV’, y uno de estos es la bisectriz de los otros dos AB y AC, cualquier recta que corte a este haz A(CBVV’) va a formar una cuaterna armónica.

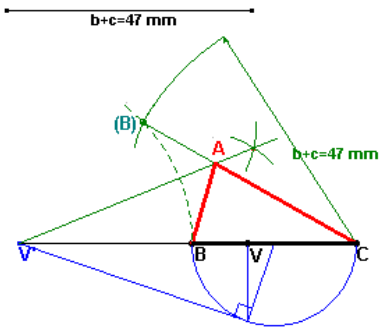


<u>Justificación de la construcción de la cuaterna armónica CBVV’ a partir de la terna CBV</u>

El ángulo BTV' = al TCB por ser semiinscrito e inscrito de la cuerda BT; el ángulo TCB = BTV. TB es la bisectriz de VTV’, y TB es perpendicular a TC; en consecuencia, como T(CBVV’) es un haz armónico, CBVV' también es una cuaterna armónica.

Resolución del ejercicio

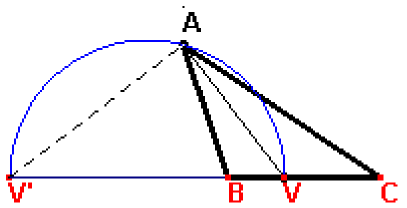
Se puede comenzar el problema completando la cuaterna CBVV', a partir de la terna conocida CBV.



El punto (B), del triángulo B(B)C transformado de la suma de lados b+c, se obtiene con la intersección de dos arcos. El uno tiene el centro en el vértice C y de radio la suma b+c. El otro tiene el centro en el pie de la bisectriz exterior V' y el arco pasa por el vértice B.

Al trazar la mediatriz del segmento B(B) se consigue la bisectriz exterior, que al cortarse con el segmento C(B), resulta el vértice A.

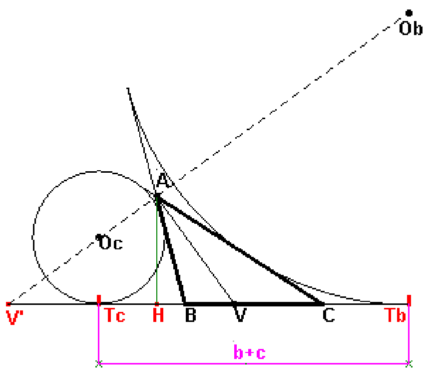
Tercer método, por la combinación de dos cuaternas armónicas.



Se ha visto que los pies de las bisectrices V' y V del vértice A, forman una cuaterna armónica con los vértices B y C, como se conocen tres puntos se puede obtener el cuarto.

Conociendo los dos pies de las bisectrices, el vértice A está en un arco capaz de 90º del segmento V'V. Este arco capaz se llama la circunferencia de Apolonio del lado a.

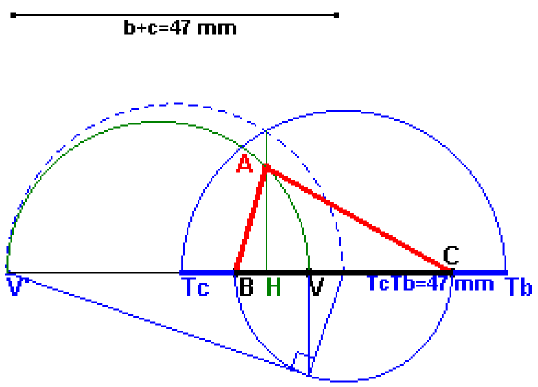
La segunda cuaterna armónica esta relacionada con las circunferencias exinscritas. Dos circunferencias y sus centros de homotecia forman una cuaterna armónica. En un triángulo el vértice A y el pie V' de su bisectriz exterior son los centros de homotecia de las circunferencias exinscritas de los vértices B y C. Al proyectar la cuaterna armónica V'-A-Oc-Ob en el lado a, resulta la cuaterna V'-H-Tc-Tb. Los puntos H y V' son los pies de la altura y la bisectriz exterior del ángulo A, Tc y Tb son los puntos de tangencia las circunferencias exinscritas de los vértices B y C, cuya distancia es (b+c)



Conociendo el pie H de la altura del vértice A, se conoce la recta base de la altura en la cual se encuentra el vértice A.

Resolución del ejercicio

El vértice A se obtiene por la intersección de dos lugares geométricos.



El primero está relacionado con la cuaterna armónica CBVV'. A partir de la terna conocida CBV, se completa la cuaterna CBVV'. Conociendo los dos pies de las bisectrices, se traza el arco capaz de 90º del segmento V'V, o sea, se halla la circunferencia de Apolonio del lado a, donde se encuentra el vértice A.

El segundo lugar geométrico está relacionado con la cuaterna Tb-Tc-H-V'. Al hacer coincidir el centro del segmento dado b+c, con el centro del lado a, se obtienen los puntos de tangencia Tc y Tb. A partir de la terna conocida TbTcV', se completa la cuaterna Tb-Tc-H-V'. Conocido el pie H de la altura, se traza por este punto una perpendicular al lado a, en la cual se encuentra el vértice A.