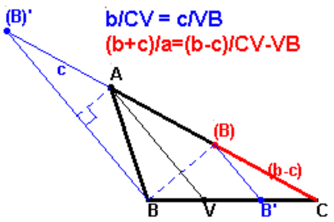
Problema 830
Construir un triángulo dado en posición los puntos B, C, y Va (pie de la bisectriz interna de A), y conocido b-c.

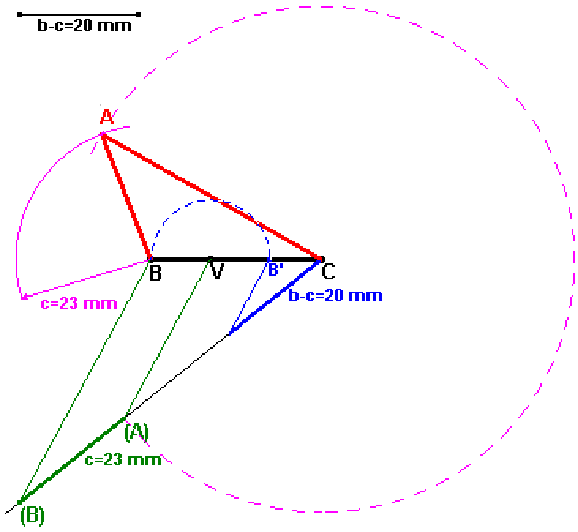
Resuelto por JULIÁN SANTAMARÍA TOBAR profesor de Dibujo del IES La Serna de Fuenlabrada

El problema se va a resolver por tres métodos, obteniendo parejas de datos equivalentes a los lados b y c, por el triángulo transformado de la diferencia de lados b-c, y por la combinación de dos cuaternas armónicas.

Primer método, resolución obteniendo parejas de datos equivalentes a los lados b y c



Según el teorema de la bisectriz, los lados b y c, son proporcionales a los segmentos CV y VB en los que el pie V de la bisectriz del vértice A, divide al lado a; por lo tanto, se conoce la relación de los lados b/c.

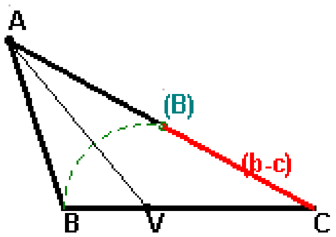


Las parejas de datos (b/c) y (b-c) son equivalentes a la pareja b y c.

Resolución del ejercicio

Como b/CV = c/VB = (b+c)/a = (b-c)/CV-VB, mediante una cuarta proporcional se obtienen los lados b y c. Se reduce el problema a resolver un triángulo dados los tres lados.

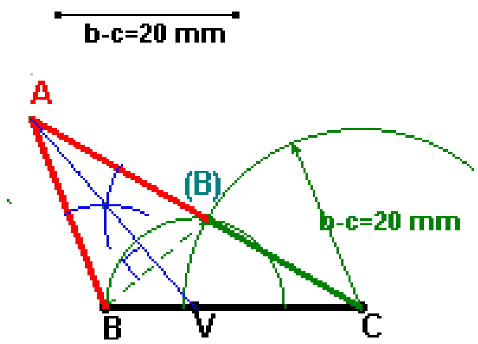
Segundo método, por el triángulo B(B)C transformado de la diferencia b-c



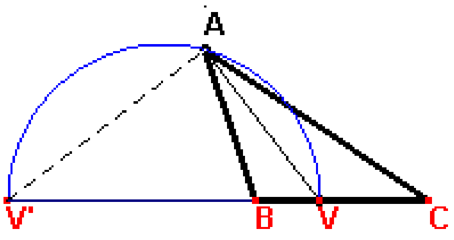
En el problema resuelto, se deduce por una parte, que al hallar el punto (B) es simétrico del vértice B con respecto a la bisectriz interior del vértice A, se obtiene el segmento conocido C(B), que es la diferencia de lados (b-c).
Por otra parte, se puede observar que por el pie V de la bisectriz interior pasa el eje de simetría que transforma el punto B el su simétrico (B), por lo tanto, B y (B) están en un arco cuyo centro es el punto V.

Resolución del ejercicio

El punto (B), del triángulo B(B)C transformado de la diferencia de lados b-c, se obtiene con la intersección de dos arcos.
El uno tiene el centro en el vértice C y de radio la diferencia de lados b-c. El otro tiene el centro en el pie de la bisectriz interior V y el arco pasa por el vértice B.
Al trazar la mediatriz del segmento B(B) se consigue la bisectriz exterior, que al cortarse con la recta C(B), resulta el vértice A.



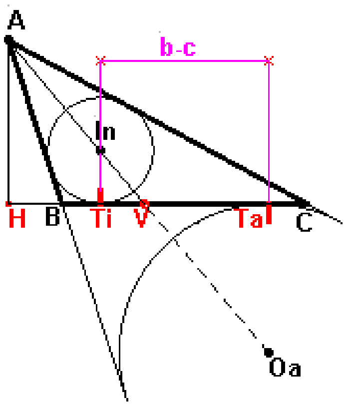
Tercer método, por la combinación de dos cuaternas armónicas.



Los pies de las bisectrices V’ y V del vértice A, forman una cuaterna armónica con los vértices B y C, como se conocen tres puntos se puede obtener el cuarto.

Conociendo los dos pies de las bisectrices, el vértice A está en un arco capaz de 90º del segmento V’V. Este arco capaz se llama la circunferencia de Apolonio del lado a.

La segunda cuaterna armónica esta relacionada con las circunferencias tangentes en el vértice A.



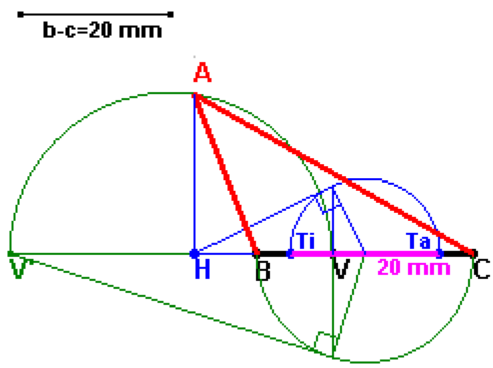
Dos circunferencias y sus centros de homotecia forman una cuaterna armónica. En un triángulo los extremos de la bisectriz interior Va son los centros de homotecia de la circunferencia inscrita y la exinscrita del vértice A. Al proyectar la cuaterna armónica A-V-In-Oa en el lado a, resulta la cuaterna H-V-Ti-Ta. H y V son los pies de la altura Ha y la bisectriz Va, y Ti y Ta son los puntos de tangencia de la inscrita y la exinscrita del ángulo A, cuya distancia es (b-c).

Conociendo el pie H de la altura del vértice A, se conoce la recta base de la altura en la cual se encuentra el vértice A.

Resolución del ejercicio

El vértice A se obtiene por la intersección de dos lugares geométricos.

El primero está relacionado con la cuaterna armónica CBVV’. A partir de la terna conocida CBV, se completa la cuaterna CBVV’. Conociendo los dos pies de las bisectrices, se traza el arco capaz de 90º del segmento V’V, o sea, se halla la circunferencia de Apolonio del lado a, donde se encuentra el vértice A.



El segundo lugar geométrico está relacionado con la cuaterna Ta-Ti-V-H. Al hacer coincidir el centro del segmento dado b-c, con el centro del lado a, se obtienen los puntos de tangencia Ta y Ti. A partir de la terna conocida TaTiV, se completa la cuaterna Ta-Ti-V-H. Conocido el pie H de la altura, se traza por este punto una perpendicular al lado a, en la cual se encuentra el vértice A.