Problema 831

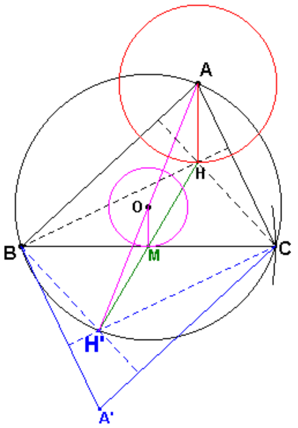
54.- Un triángulo tiene un vértice A fijo en una circunferencia y el lado BC opuesto de longitud constante, es una cuerda variable de dicha circunferencia. Hallar el lugar geométrico del centro de la circunferencia de los nueve puntos de dichos triángulos.

Ortega y Sala, M. (1940): Geometría. Tomo II (Complementos y ejercicios)

Obra elegida para el ingreso en las Academias Militares. 17 Edición.

Resuelto por JULIÁN SANTAMARÍA TOBAR profesor de Dibujo del IES La Serna de Fuenlabrada

El centro de la circunferencia de nueve puntos se encuentra en el punto medio del circuncentro O y del ortocentro H. Como el circuncentro está fijo, el centro pedido está en la figura geométrica que resulte de transformar el lugar geométrico del ortocentro H, sometido a las mismas condiciones del enunciado. Esta transformación consiste en establecer una homotecia de centro el circuncentro O y de razón = 1/2. Por lo tanto se trata de descubrir el lugar geométrico del ortocentro H, para lo cual se van utilizar dos métodos.

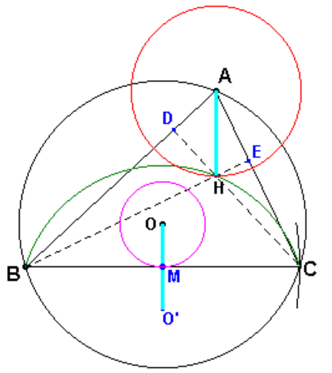


Primer método para hallar el lugar geométrico del ortocentro H.

Al hacer el simétrico del vértice A con respecto del punto medio M del lado BC. Sale el paralelogramo CABA'. El ortocentro H' del triángulo CBA' también es simétrico de H.

El cuadrilátero CABH' es inscriptible por que ACH'=ABH'=90º => 1º el punto H' está en la circunferencia circunscrita, 2º la diagonal AH' es el diámetro por tener dos ángulos opuestos rectos. El segmento OM está relacionado con el segmento AH por una homotecia de centro H' y razón = 2. Como el LG del punto medio M del lado BC de longitud fija cuando gira este lado, es una circunferencia de radio OM, el lugar geométrico del ortocentro H es la circunferencia homotética de centro A y radio 2OM=AH.

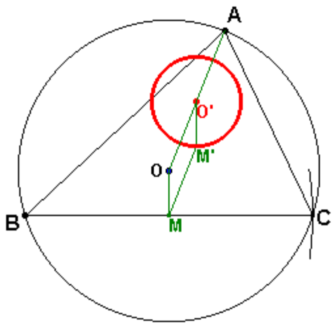
Segundo método para hallar el lugar geométrico del ortocentro H.



El cuadrilátero ADHE es inscriptible porque ADH=AEH=90º => DHE=BHC=180-A. El ortocentro H está en un arco capaz, el cual, es un arco simétrico de la circunferencia circunscrita, por lo tanto, el centro de este arco capaz es el punto O' simétrico del circuncentro O respecto del lado a. Este arco capaz también es el lugar geométrico de los puntos de la circunferencia circunscrita sometidos a la traslación O-O' = AH. Por lo tanto 2OM=AH.

Como en el método anterior, el segmento OM está relacionado con el segmento AH por una homotecia de razón = 2 (el centro de homotecia no es necesario). Como el LG del punto medio M del lado BC de longitud fija cuando gira este lado, es una circunferencia de radio OM, el lugar geométrico del ortocentro H es la circunferencia homotética de centro A y radio 2OM=AH.

Solución del LG del centro de la circunferencia de los nueve puntos.



La solución consiste en someter a la homotecia de centro el circuncentro O y de razón = 1/2, el lugar geométrico del ortocentro H que está formado por la circunferencia de centro A y radio 2OM=AH.

La figura pedida es una circunferencia de centro el punto medio entre el circuncentro O y el vértice A cuyo radio es la distancia OM. Para llevar la distancia OM se ha utilizado una traslación.