Problema 831

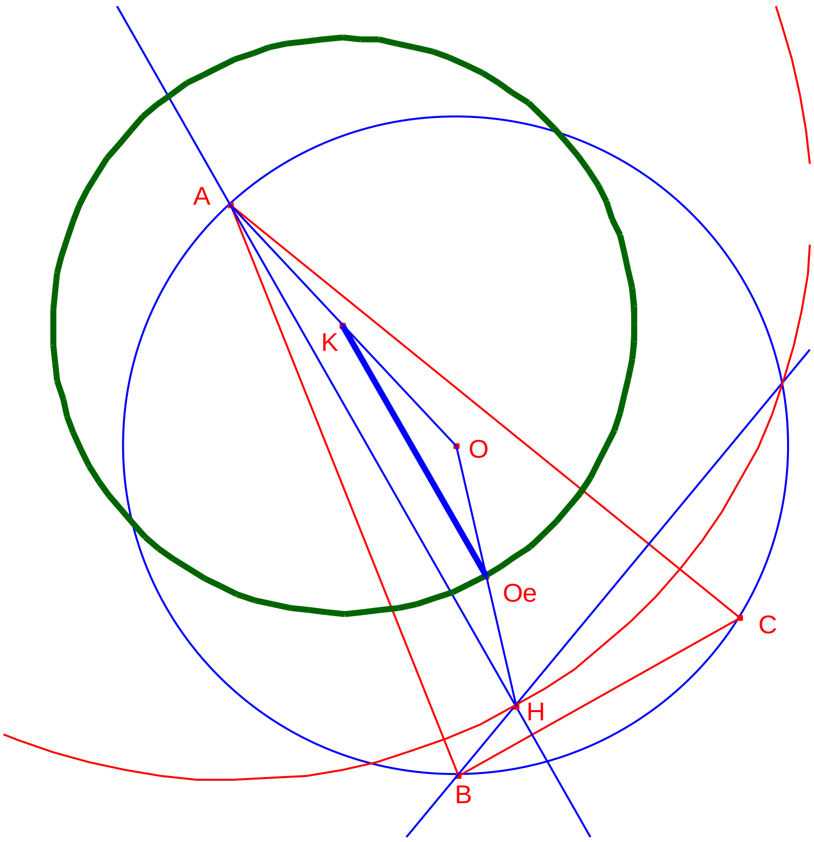
Un triangle té vèrtex A fix en una circumferència i el costat $\overline{BC}$ oposat de longitud constant, és una corda variable de la circumferència.

Determineu el lloc geomètric del centre de la circumferència dels nou punts dels triangles.

Ortega y Sala, M. (1940): [Geometría.](#) Tomo II (Complementos y ejercicios)

Obra elegida para el ingreso en las Academias Militares. 17 Edición.

Solució de Ricard Peiró i Estruch:



El centre O_e de la circumferència dels nou punts:del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és igual al punt mig del segment format pel circumcentre O i l'ortocentre H.

O és un punt fix.

A és un punt fix.

Siga K el punt mig del segment $\overline{AO}$. K és un punt fix.

L'angle A és un angle constant.

Vegem que el segment $\overline{AH}$ és constant.

$\angle ABH = 90º - A$, $\angle BAH = 90 - B$. Aleshores, $\angle BHA = 180 - C$.

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{ABH}$:

$$\frac{\overline{AH}}{\cos A} = \frac{c}{\sin C}.$$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{ABH}$:

$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$.

Aleshores, $\overline{AH} = a\frac{\cos A}{\sin A}$, aleshores, $\overline{AH}$ és constant. Per tant, el lloc geomètric de H és la circumferència de centre A i radi $a\frac{\cos A}{\sin A}$.

$\overline{KO_e}$ és la paral·lela mitjana del triangle $\overset{\Delta}{AHO}$.

Aleshores, $\overline{KO_e} = \frac{1}{2}\overline{AH} = \frac{1}{2}a\frac{\cos A}{\sin A}$. K fix.

Aleshores, O_e recorre la circumferència de centre K i radi $\frac{1}{2}\frac{\cos A}{\sin A}a$.