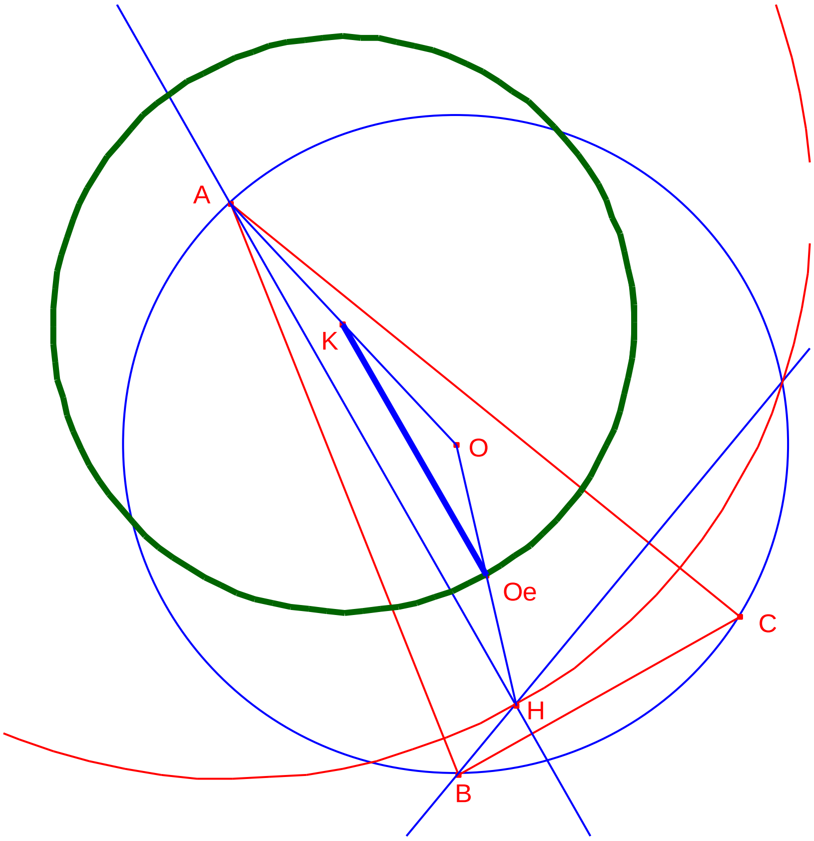
Problema 831

Un triángulo tiene vértice A fijo en una circunferencia y el lado $\overline{BC}$ opuesto de longitud constante, es una cuerda variable de la circunferencia.
Determina el lugar geométrico del centro de la circunferencia de los nueve puntos de los triángulos.
Ortega y Sala, M. (1940): Geometría. Tomo II (Complementos y ejercicios)
Obra elegida para el ingreso en las Academias Militares. 17 Edición.

Solución de Ricard Peiró i Estruch:



El centro O_e de la circunferencia de los nueve puntos del triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$ es igual al punto medio del segmento formado por el circuncentro O y el ortocentro H.
O es un punto fijo.
A es un punto fijo.
Sea K el punto medio del segmento $\overline{AO}$. K es un punto fijo.
El ángulo A es un ángulo constante.

Veamos que el segmento $\overline{AH}$ es constante.
$\angle ABH = 90º - A$, $\angle BAH = 90 - B$. Entonces, $\angle BHA = 180 - C$.

Aplicado el teorema de los senos al triángulo $\overset{\Delta}{ABH}$:

$$\frac{\overline{AH}}{\cos A} = \frac{c}{\sin C}.$$

Aplicando el teorema de los senos al triángulo $\overset{\Delta}{ABH}$:

$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$.

Entonces, $\overline{AH} = a\frac{\cos A}{\sin A}$, entonces, $\overline{AH}$ es constante. Por tanto, el lugar geométrico de H es la circunferencia de centro A y radio $a\frac{\cos A}{\sin A}$.

$\overline{KO_e}$ es la paralela media del triángulo $\overset{\Delta}{AHO}$.

Entonces, $\overline{KO_e} = \frac{1}{2}\overline{AH} = \frac{1}{2}a\frac{\cos A}{\sin A}$. K fijo.

Entonces, O_e recorre la circunferencia de centro K y radio $\frac{1}{2}\frac{\cos A}{\sin A}a$.