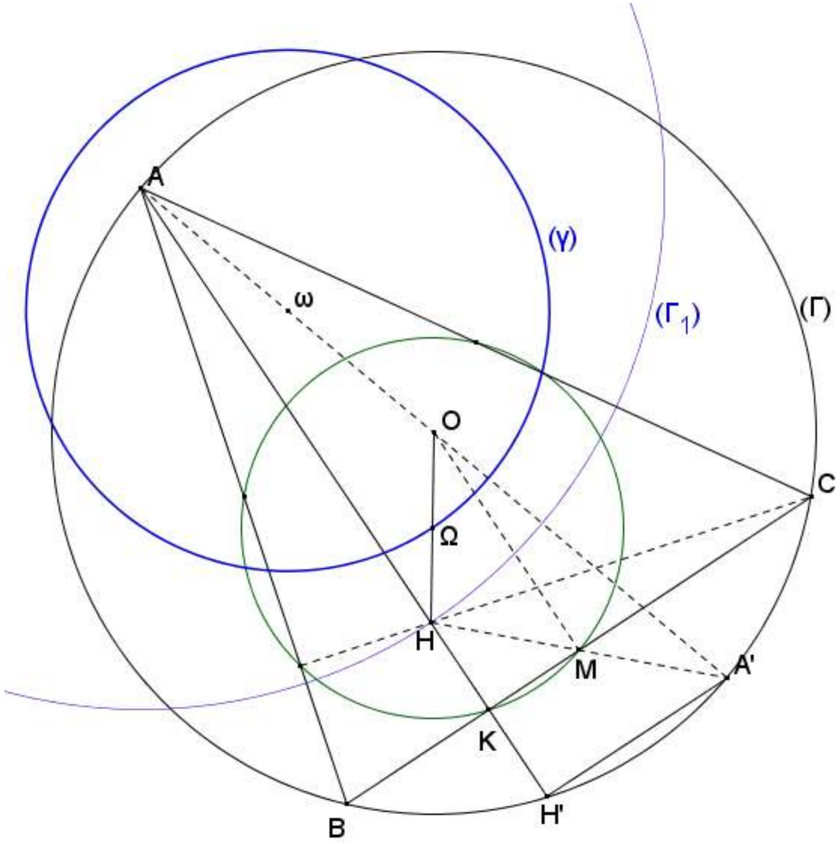
Problema n° 831

54.- Un triángulo tiene un vértice A fijo en una circunferencia y el lado BC opuesto de longitud constante, es una cuerda variable de dicha circunferencia. Hallar el lugar geométrico del centro de la circunferencia de los nueve puntos de dichos triángulos.

Ortega y Sala, M. (1940): Geometría. Tomo II (Complementos y ejercicios)

Solution proposée par Philippe Fondanaiche



On désigne par (Γ) le cercle fixe de centre O et de rayon R, par 2a = BC la longueur constante de la corde BC, par M le milieu de cette corde et par H l'orthocentre du triangle ABC

Lemme n°1: quand le point B parcourt le cercle (Γ) de sorte que BC = a, le lieu de M est le cercle de centre O et de rayon $\sqrt{R^2 - a^2}$ = constante.

Démonstration : le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle OMB donne immédiatement : $OM^2 = OB^2 - BM^2 = R^2 - a^2$.

Lemme n°2: quand le point B parcourt le cercle (Γ), le lieu de H est le cercle (Γ_1) de centre A et de rayon AH = 2OM = $2\sqrt{R^2 - a^2}$

Démonstration : soient A' le point diamétralement opposé à A sur le cercle (Γ), K le pied de la hauteur issue de A sur BC et H' le point d'intersection de la hauteur AH avec le cercle (Γ).

On a les propriétés bien connues que l'on suppose démontrées:

K milieu de HH';

H,M et A' sont alignés avec M milieu de HA'

AH = 2OH.

Soit Ω le centre du cercle d'Euler ou cercle des neuf points du triangle ABC.

Comme Ω est le milieu de OH,le lieu de Ω est le cercle (γ) homothétique du cercle (Γ_1) par l'homothétie de centre O et de rapport 1/2. C'est donc le cercle de centre ω milieu de OA et de rayon $\sqrt{R^2 - a^2}$.