Pr. Cabri 832

En un triángulo ABC, el ángulo de B es igual a 45°. Sea D el punto simétrico del punto A con relación al medio del lado BC. Sean M y N los medios de los lados BD y CD. Demostrar que el ángulo de A del triángulo ABC es igual a 60° si y solamente si los cuatro puntos A, M, N y C son concí-clicos.
Propuesto por Philippe Fondanaiche.

- ### Solución
  ### por César Beade Franco

Tomamos como vértices del triángulo A(a,a), B(0,0) y C(1,0).
Los otros puntos son D(1-a,-a), M($\frac{1-a}{2}$,-$\frac{a}{2}$) y N($\frac{2-a}{2}$,-$\frac{a}{2}$)
Como MN es paralelo a BC el ángulo MNC es suplementario de A=45°, así que mide 135°.
Para que A, M, N y C sean concíclicos es necesario y suficiente que CAM mida 45°. Aplicamos el teorema del coseno al triángulo AMC e imponiéndole la condición de de que el ángulo en A mida 45°, resulta que $\text{CosA} = \frac{AM^2+AC^2-MC^2}{2\,AM.MC}$, que nos lleva a la ecuación $\frac{\sqrt{2}}{2} == \frac{(a-1)^2+a^2+\left(\frac{3a-1}{2}\right)^2+\frac{9}{4}a^2-\left(\left(\frac{1+a}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2\right)}{2\sqrt{(a-1)^2+a^2}\sqrt{\left(\frac{3a-1}{2}\right)^2+\frac{9}{4}a^2}}$, que nos da como soluciones $a = \frac{1}{6}\left(3-\sqrt{3}\right)$ y $a = \frac{1}{6}\left(3+\sqrt{3}\right)$.
Calculamos el ángulo C en cada caso, teniendo en cuenta que su seno se obtiene dividiendo la altura desde A por la longitud de AC, es decir, $\text{SenC} = \frac{a}{\sqrt{(a-1)^2+a^2}}$.
Si $a = \frac{1}{6}\left(3-\sqrt{3}\right)$, se obtiene C=15° $\Longrightarrow$ A=120° y si $a = \frac{1}{6}\left(3+\sqrt{3}\right)$, se obtiene C=75° $\Longrightarrow$ A=60°