Propuesto por Philippe Fondanaiche.

Problema 832.

En un triángulo ABC, el ángulo de B es igual a 45 °.

Sea D el punto simétrico del punto A con relación al medio del lado BC.

Sean M y N los medios de los lados BD y CD.

Demostrar que el ángulo de A del triángulo ABC es igual a 60 ° si y solamente si los cuatro puntos A, M, N y C son concíclicos.

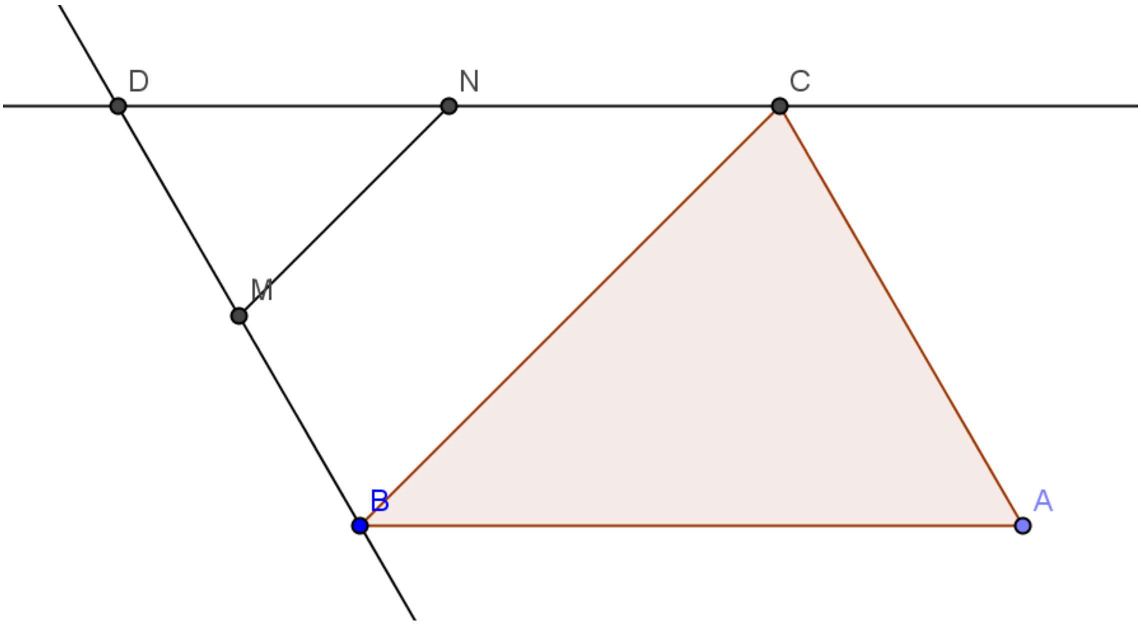
Fondanaiche, P. (2017): Comunicación personal.

Solución del director de la implicación A=60º -> AMNC concíclicos.

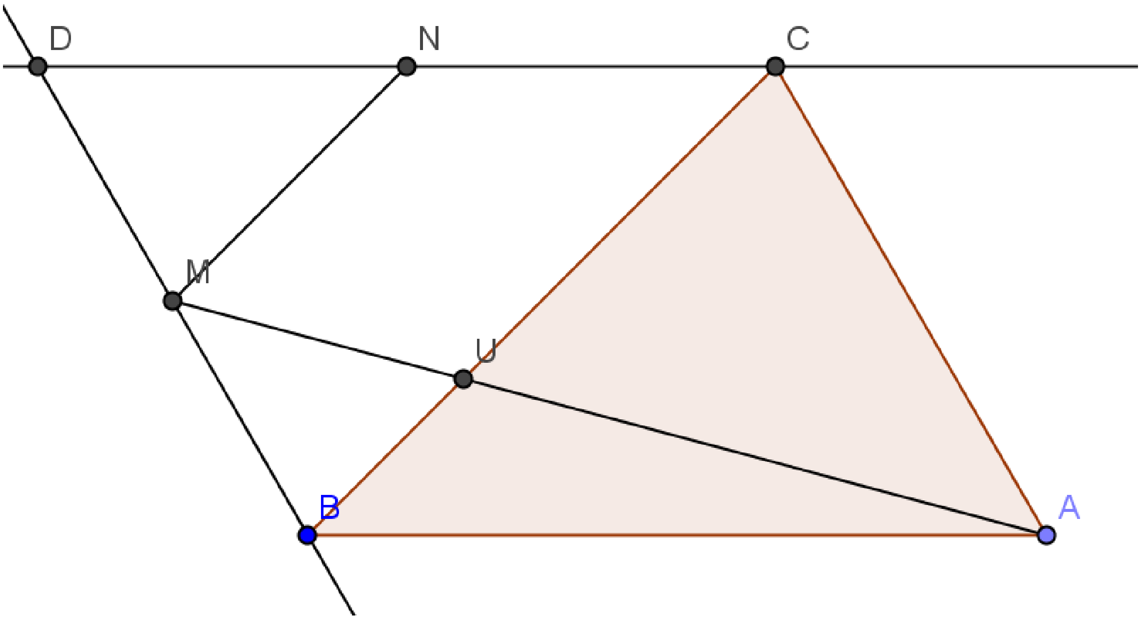
A) Sea A=60º.
Tomemos sin pérdida de generalidad AB=1
Es al ser B=45º,

$$AC = \sqrt{1^2 + BC^2 - 2\cos 45º\ 1\ BC} = \sqrt{1 + BC^2 - \sqrt{2}BC}$$

Y, $BC = \sqrt{1 + AC^2 - 2\cos 60º\ 1\ AC} = \sqrt{1 + AC^2 - AC}$
Conjugando todo y operando es:
AB=1, AC=$\sqrt{3} - 1$, $BC = \sqrt{6 - 3\sqrt{3}}$



Si trazamos AM, corta en U a CB.
Los triángulos BMU y CAU son semejantes de razón ½.
Así BU=$\sqrt{6 - 3\sqrt{3}}/3$, BM=$(\sqrt{3} - 1)/2$, MU=$\sqrt{6 - 3\sqrt{3}}/(3\ ((\sqrt{3} - 1))$



Luego $\angle CAU = \angle CAM =$45º, y dado que $\angle CNM = 135º$, se tiene lo pedido.
También es de reseñar que los triángulos ABC y UAC son semejantes.