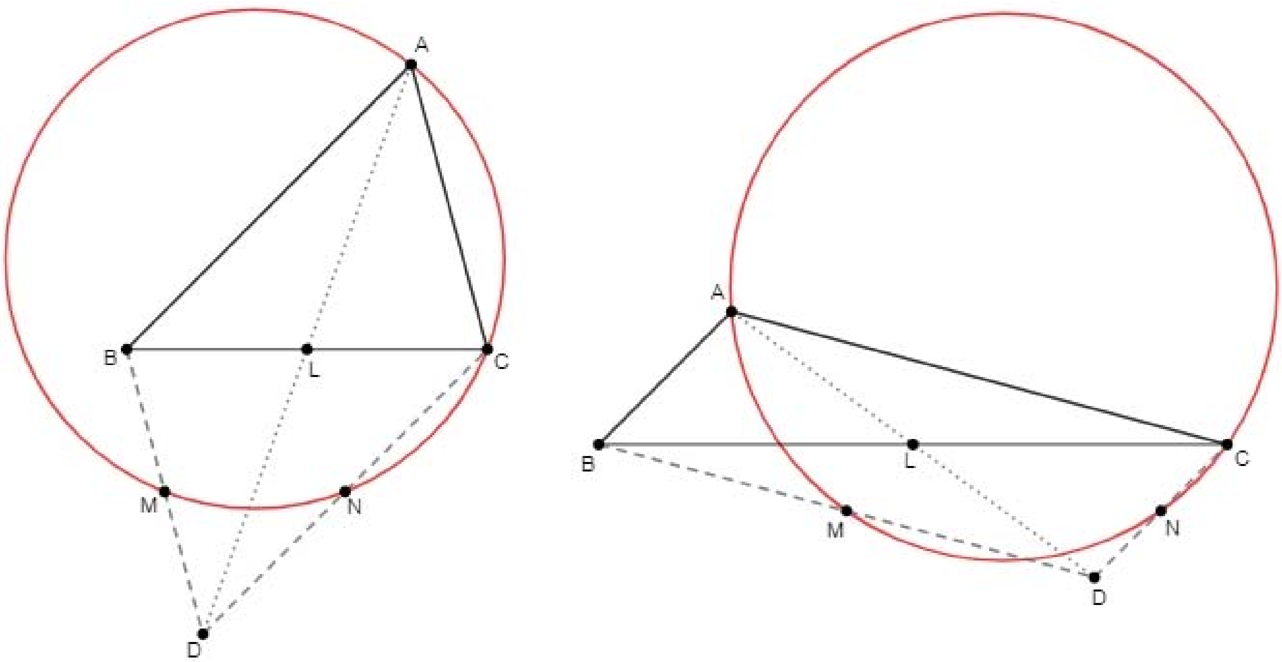
TRIÁNGULOS CABRI

Problema 832. (propuesto por Philippe Fondanaiche) Dado un triángulo ABC tal que $\measuredangle CBA = \frac{\pi}{4}$, se consideran el punto simétrico D del punto A con respecto al punto medio L del segmento BC y los puntos medios M y N de los segmentos BD y CD, respectivamente. Probar que los puntos A, M, N y C son concíclicos si y sólo si $\measuredangle BAC = \frac{\pi}{3}$ ó $\measuredangle BAC = \frac{2\pi}{3}$.



Solución:

Vamos a hacerlo de cuatro formas distintas:

① Considerando coordenadas baricéntricas con respecto al triángulo ABC, como $L = (0:1:1)$, entonces:

$$D = (-1:1:1) \Rightarrow \begin{cases} M = (-1:2:1) \\ N = (-1:1:2) \end{cases}$$

por lo que la ecuación de la circunferencia circunscrita al triángulo AMC es:

$$4(c^2xy + b^2xz + a^2yz) - (2a^2 - b^2 - 2c^2)y(x+y+z) = 0$$

e, imponiendo que el punto N esté situado sobre ella, obtenemos que:

$$2a^2 - 3b^2 = 0$$

Además, como $\measuredangle CBA = \frac{\pi}{4}$, entonces:

$$S_B = S\cot(\measuredangle CBA) = S$$

Miguel-Ángel Pérez García Ortega

por lo que:

$$\frac{(a^2-b^2+c^2)^2}{4}=S_B^2\underset{*}{=}S^2=\frac{(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)(a+b+c)}{4}$$

y, por tanto:

$$(a^2-b^2)^2=c^2(2b^2-c^2)$$

Finalmente, como:

$$\frac{(a^2-b^2+c^2)^2}{4}=S_B^2=3S_A^2=\frac{(-a^2+b^2+c^2)^2}{12}$$

si y sólo si:

$$0=-(a^2-b^2)^2+c^2(4a^2-4b^2-c^2)\underset{(a^2-b^2)^2=c^2(2b^2-c^2)}{=}-c^2(2b^2-c^2)+c^2(4a^2-4b^2-c^2)=2c^2(2a^2-3b^2)$$

resulta que:

$$\left\{\begin{array}{c}\triangle BAC=\dfrac{\pi}{3}\\ \text{ó}\\ \triangle BAC=\dfrac{2\pi}{3}\end{array}\right.\Leftrightarrow S_A=S\cot(\triangle BAC)=\pm\frac{S}{\sqrt{3}}\underset{S=S_B}{\Leftrightarrow}S_B^2=3S_A^2\underset{c>0}{\Leftrightarrow}2a^2-3b^2=0\Leftrightarrow AMNC\text{ es cíclico}$$

② Según se ha probado en la primera solución, el cuadrilátero $AMNC$ es cíclico si y sólo si $2a^2-3b^2=0$, es decir, si y sólo si $b=\frac{\sqrt{2}\,a}{\sqrt{3}}$. Además, como $\triangle CBA=\frac{\pi}{4}$, según el Teorema del Seno:

$$\frac{a}{\sin(\triangle BAC)}=\frac{b}{\sin(\triangle CBA)}=\frac{\frac{\sqrt{2}\,a}{\sqrt{3}}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\Leftrightarrow\sin(\triangle BAC)=\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}\triangle BAC=\dfrac{\pi}{3}\\ \text{ó}\\ \triangle BAC=\dfrac{2\pi}{3}\end{array}\right.$$

y, por tanto:

$$AMNC\text{ es cíclico}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}\triangle BAC=\dfrac{\pi}{3}\\ \text{ó}\\ \triangle BAC=\dfrac{2\pi}{3}\end{array}\right.$$

③ Según se ha probado en la primera solución, el cuadrilátero $AMNC$ es cíclico si y sólo si $2a^2 - 3b^2 = 0,$ es decir, si y sólo si $b = \dfrac{\sqrt{2}\,a}{\sqrt{3}},$ lo cual significa que el punto A ha de estar situado sobre la circunferencia con centro en el punto C y radio igual a $\dfrac{\sqrt{2}\,BC}{\sqrt{3}}.$ Además, considerando el sistema de referencia cartesiano de ejes rectangulares con origen en el punto medio L del segmento BC y eje de abscisas en la recta BC y tomando como unidad de medida la semilongitud del segmento $BC,$ si $A = (x, y)\ (y \neq 0),$ como:

$$\begin{cases} C = (1,0) \\ B = (-1,0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = BC = 2 \\ b = AC = \sqrt{(x-1)^2 + y^2} \\ c = AB = \sqrt{(x+1)^2 + y^2} \end{cases}$$

entonces, el punto A ha de estar situado sobre la recta cuya ecuación es $y = x + 1$ (por ser $\triangle CBA = \frac{\pi}{4}$) y sobre la circunferencia de ecuación:

$$3x^2 + 3y^2 - 6x - 5 = 0$$

por lo que, resolviendo el sistema formado por ambas ecuaciones, obtenemos que:

$$A = \left(\pm\frac{\sqrt{3}}{3}, 1 \pm \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \Rightarrow \overrightarrow{CA} = \left(-1 \pm \frac{\sqrt{3}}{3}, 1 \pm \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \Rightarrow \tan(\triangle ACB) = -m_{CA} = 2 \pm \sqrt{3}$$

Finalmente:

$$AMNC \text{ es cíclico} \Leftrightarrow \tan(\triangle ACB) = -m_{CA} = 2 \pm \sqrt{3} \Leftrightarrow \begin{cases} \triangle ACB = \dfrac{5\pi}{12} \\ \text{ó} \\ \triangle ACB = \dfrac{\pi}{12} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \triangle BAC = \dfrac{\pi}{3} \\ \text{ó} \\ \triangle BAC = \dfrac{2\pi}{3} \end{cases}$$

④ Considerando el sistema de referencia cartesiano de ejes rectangulares respecto del cual $B = (0,0)$ y $C = (1,0),$ si $A = (u,u)\ (u > 0),$ como $L = \left(\frac{1}{2}, 0\right),$ entonces:

$$D = (1-u, -u) \Rightarrow \begin{cases} M = \left(\dfrac{1-u}{2}, -\dfrac{u}{2} \right) \\ N = \left(\dfrac{2-u}{2}, -\dfrac{u}{2} \right) \end{cases}$$

por lo que la ecuación de la circunferencia circunscrita al triángulo AMC es:

$$x^2 + y^2 + \left(\frac{6u^2 - 2u - 5}{4} \right) x - \left(\frac{6u^2 - 3u + 1}{4u} \right) y - \frac{6u^2 - 2u - 1}{4} = 0$$

e, imponiendo que el punto N esté situado sobre ella, obtenemos que:

$$6u^2 - 6u + 1 = 0 \Rightarrow u = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{6} \Rightarrow A = \left(\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{6} \right)$$

luego:

$$\begin{cases} \overrightarrow{BA} = \left(\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{6}\right) \\ \overrightarrow{CA} = \left(-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{6}\right) \end{cases}$$

y, por tanto:

$$\cos(\triangle BAC) = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CA}}{\left|\overrightarrow{BA}\right|\left|\overrightarrow{CA}\right|} = \pm\frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \triangle BAC = \frac{\pi}{3} \\ \text{ó} \\ \triangle BAC = \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

Recíprocamente, si:

$$\begin{cases} \triangle BAC = \frac{\pi}{3} \\ \text{ó} \\ \triangle BAC = \frac{2\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \triangle ACB = \frac{5\pi}{12} \\ \text{ó} \\ \triangle ACB = \frac{\pi}{12} \end{cases} \Rightarrow \tan(\triangle ACB) = -2 \pm \sqrt{3}$$

entonces:

$$\begin{cases} BA \equiv y = x \\ CA \equiv y = (-2 \pm \sqrt{3})(x - 1) \end{cases} \Rightarrow A = \left(\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{6}\right)$$

por lo que:

$$D = \left(\frac{\sqrt{3}}{6} \pm \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6} \mp \frac{1}{2}\right) \Rightarrow \begin{cases} M = \left(\frac{\sqrt{3}}{12} \pm \frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{12} \mp \frac{1}{4}\right) \\ N = \left(\frac{\sqrt{3}}{12} \pm \frac{3}{4}, \frac{\sqrt{3}}{12} \mp \frac{3}{4}\right) \end{cases}$$

siendo la ecuación de la circunferencia circunscrita al triángulo AMC:

$$x^2 + y^2 - \frac{(6 \pm \sqrt{3})x}{6} - \frac{y}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{6} = 0$$

y, pudiéndose comprobar, por simple sustitución, que el punto N está situado sobre ella, ya que sus coordenadas verifican dicha ecuación. Por tanto, el cuadrilátero $AMNC$ es cíclico sus coordenadas verifican dicha ecuación. Por tanto, el cuadrilátero $AMNC$ es cíclico.