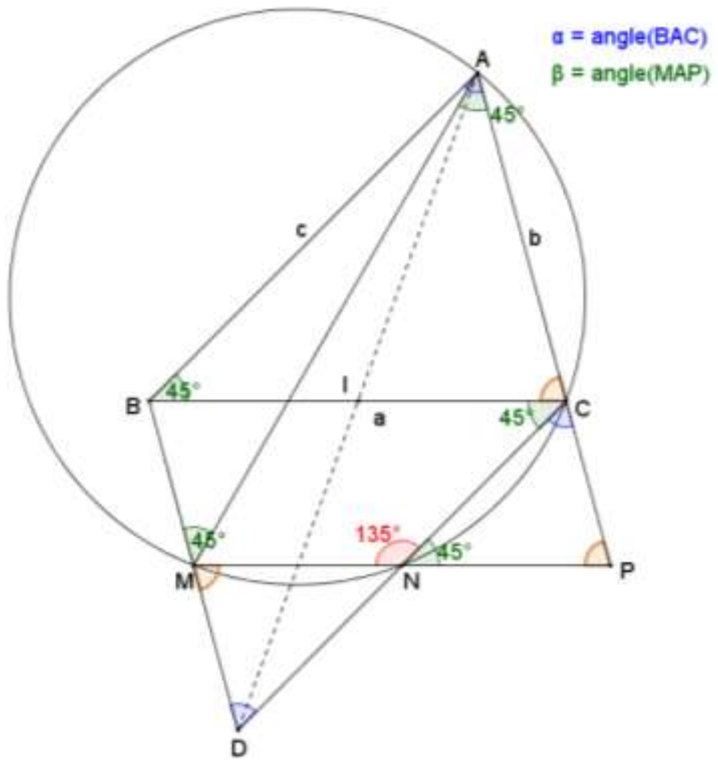
Problema n° 832
En un triángulo ABC, el ángulo de B es igual a 45 °.
Sea D el punto simétrico del punto A con relación al medio del lado BC.
Sean M y N los medios de los lados BD y CD.
Demostrar que el ángulo de A del triángulo ABC es igual a 60 ° si y solamente si los cuatro puntos A, M, N y C son concíclicos.

Solution proposée par Philippe Fondanaiche



On désigne par a,b et c les longueurs respectives des côtés BC,CA et AB du triangle ABC.
La droite (MN) coupe la droite (AC) au point P. Par construction le quadrilatère ABDC est un parallélogramme de centre I milieu de BC. Il en est de même du quadrilatère CPDM qui est un parallélogramme de centre N. Les droites (AB) et (CD) sont paralléles entre elles de même que les droites (AC) et (BD).
D'où les relations d'angles: $\angle ABC = 45°$, $\angle BCD = 45°$, $\angle CNP = 45°$. $\angle MNC = 135°$ et les égalités MP = BC = a,BM = b/2.

1er cas: les points A,M,N et C sont cocycliques.
On pose $\angle BAC = \alpha$. D'où $\angle ACB = 135° - \alpha$, $\angle ABM = 180° - \alpha$ et $\angle BAM = \alpha - 45°$.
Comme $\angle MNC = 135°$, on en déduit $\angle MAP = 45°$ puis $\angle AMB = 45°$.
Comme $\angle ACB = \angle AMP$ et $\angle MAP = \angle ABC = 45°$, les triangles ABC et MAP sont semblables.Il en résulte que MA/MP = MA/a = AB/AC = c/b, soit MA = ac/b.
Par ailleurs la loi des sinus dans le triangle ABM donne la relation $MA/\sin(180° - \alpha) = b/2\sin(\alpha - 45°)$.
et cette même loi dans le triangle ABC donne $a/b = \sin(\alpha)/\sin(45°)$ et $c/b = \sin(135° - \alpha)/\sin(45°)$
La combinaison de ces relations conduit à l'équation $2.\sin(\alpha - 45°).\sin(135° - \alpha) = \sin^2(45°) = 1/2$,
soit $4\sin(\alpha - 45°).\sin(135° - \alpha) = 1$ ou encore $2[\cos(90°) + \cos(180° - 2\alpha)] = 1$.
D'où : $\cos(180° - 2\alpha) = 1/2 = \cos(60°)$ ==> $\boldsymbol{\alpha = \angle BAC = 60°}$

2ème cas: $\angle$BAC = 60°
Dans le triangle MAP, on a les égalités AP = 3b/2 et $\angle MAP = \beta$, $\angle APM = 180° - 60° - 45° = 75°$,
$\angle AMP = 105° - \beta$. D'où d'après la loi des sinus $a/\sin(\beta) = 3b/2\sin(105° - \beta)$.
Par ailleurs cette même loi dans le triangle ABC donne $a/\sin(60°) = b/\sin(45°)$.
D'où $3\sin(45°).\sin(\beta) = 2\sin(60°).\sin(105° - \beta)$ qui se ramène à $\sin(45°).\sin(105° - \beta) = \sin(60°)\sin(\beta)$.
On en déduit $\cos(60° - \beta) + \cos(150° - \beta) = \cos(60° - \beta) + \cos(60°+\beta)$ ==> $2\beta = 90°$ soit $\beta = 45°$ qui est l'angle supplémentaire de l'angle $\angle MNC = 135°$. Les quatre points A,M,N et C sont sur un même cercle.
.