Quincena del 1 al 15 de Junio de 2017.

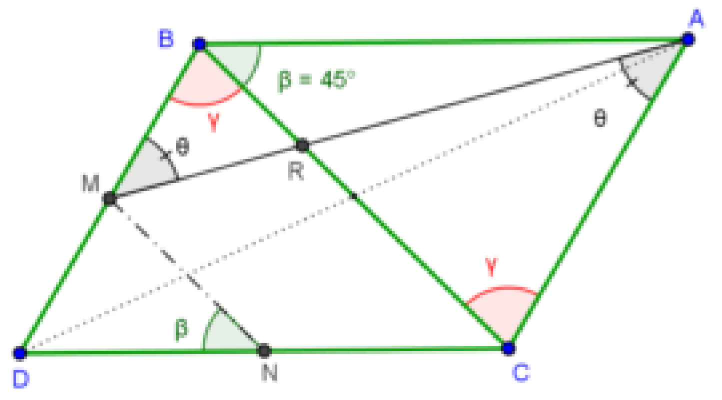
Propuesto por Philippe Fondanaiche.

***Problema* 832.**- *En un triángulo ABC, el ángulo de B es igual a $45°$. Sea D el punto simétrico del punto A con relación al medio del lado BC. Sean M y N los medios de los lados BD y CD. Demostrar que el ángulo de A del triángulo ABC es igual a 60 ° si y solamente si los cuatro puntos A, M, N y C son concíclicos.*

Fondanaiche, P. (2017): Comunicación personal.

Solución de Saturnino Campo Ruiz, Profesor de Matemáticas jubilado, de Salamanca.

-La recta AM corta al lado BC en R. Los triángulos BRM y CRA son semejantes. De la relación de semejanza entre ellos se obtiene



$$2 = \frac{AC}{BM} = \frac{AR}{MR} = \frac{CR}{BR}.$$

Por tanto el área del triángulo ABR es el doble de la del triángulo RBM. La relación de sus áreas es la que sigue. Si llamamos $\theta = \measuredangle RAC$ tenemos $AB \cdot AR \cdot \operatorname{sen}(\alpha - \theta) = 2BM \cdot RM \cdot \operatorname{sen}\theta$; $c \cdot 2RM \cdot \operatorname{sen}(\alpha - \theta) = b \cdot RM \cdot \operatorname{sen}\theta$; $\frac{2c}{b} = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}(\alpha-\theta)}$ y teniendo en cuenta el teorema de los senos, la razón de los lados es la de los ángulos opuestos, resultando finalmente

$$\boxed{\frac{2\operatorname{sen}\gamma}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}(\alpha-\theta)}} \qquad (*)$$

- Si el ángulo $\alpha = 60°$, $\gamma = 75°$ y se tendrá

$$\frac{2\operatorname{sen}\gamma}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{2\operatorname{sen} 75°}{\operatorname{sen} 45°} = \sqrt{3} + 1.$$

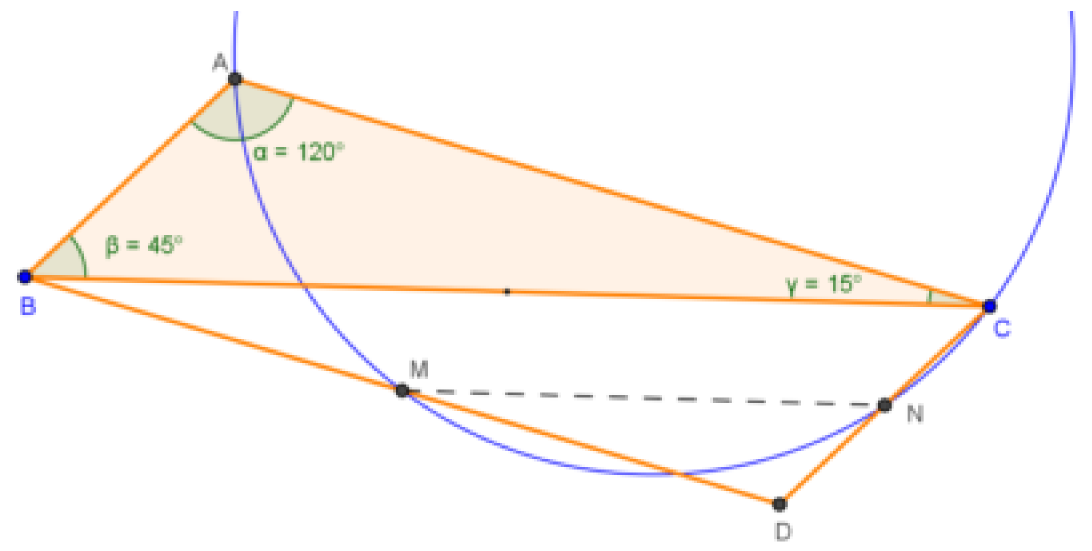
La ecuación trigonométrica $\frac{\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}(60°-\theta)} = \sqrt{3} + 1$,([1]) tiene como solución $\theta = 45°$; como el ángulo $\measuredangle MNC = 180° - \beta = 135°$, resulta que el cuadrilátero $AMNC$ es cíclico como se pretendía demostrar.

- El cuadrilátero $ACMN$ tiene en cada vértice los ángulos $\theta, \beta + \gamma, 180° - \beta$ y $180° - \theta - \gamma$.

Poniendo que los ángulos opuestos sean suplementarios tenemos que este cuadrilátero será cíclico cuando $\beta = \theta$ y recíprocamente. Ya hemos visto que cuando $\alpha = 60°$, el ángulo $\theta = 45°$ y resulta por tanto inscriptible. Veamos ahora la recíproca, es decir, partimos de que el cuadriláteo es inscriptible (por tanto $\beta = \theta$) y hay que concluir que $\alpha = 60°$.

Si $\beta = \theta$ los triángulos ARC y BAC son semejantes: $\frac{RC}{AC} = \frac{AC}{BC}, \frac{2a}{3b} = \frac{b}{a}$ y sustituyendo las razones de los lados por las de los senos correspondientes tendremos $2 \cdot \operatorname{sen}^2\alpha = 3 \cdot \cos^2 45°$ o bien $\operatorname{sen}^2\alpha = \frac{3}{4}$, una solución de esta ecuación es $\alpha = 60°$.

Para $\alpha = 120°$ también resulta que el cuadrilátero $AMNC$ es cíclico como muestra la figura



■

([1]) $\frac{\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}(60-\theta)} = \sqrt{3} + 1$ equivale a $\operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}(60-\theta) = \sqrt{3}\operatorname{sen}(60-\theta)$ y ésta a $\sqrt{3}\operatorname{sen}(30-\theta) = \sqrt{3}\operatorname{sen}(60-\theta)$ y ya de ahí $\theta = 45°$ como única solución.