Problema 834
Construir un triángulo dado en posición los puntos B , C, y Ha (pie de la altura de A), y conocido b-c.

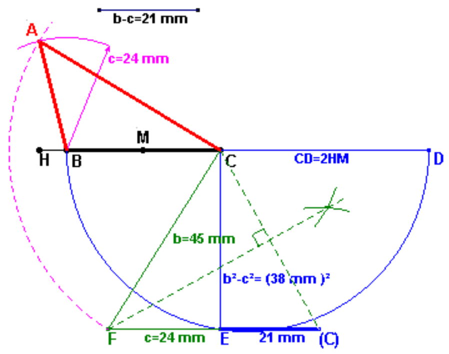
Resuelto por JULIÁN SANTAMARÍA TOBAR profesor de Dibujo del IES La Serna de Fuenlabrada

El problema se va a resolver por dos métodos, por la obtención de parejas de datos equivalentes a los lados b y c, y por la combinación de dos cuaternas armónicas.

Primer método, resolución obteniendo parejas de datos equivalentes a los lados b y c

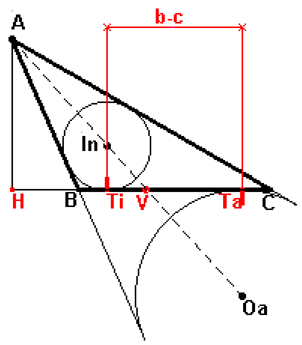
Las parejas de datos (a, pie H de la altura) y (a, b^2-c^2) son equivalentes, y están relacionadas con el teorema de la proyección de la mediana (b^2-c^2 = 2HM . a), siendo H y M los pies de la altura y la mediana del vértice A.
Las parejas de datos (b^2-c^2) y (b-c) son equivalentes a la pareja b y c.

Resolución del ejercicio

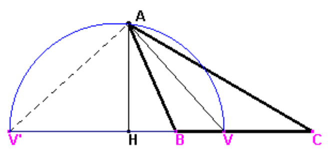


Tomando los segmentos BC y CD=2HM, se aplica el teorema de la altura para hallar su media proporcional CE que corresponde al lado de un cuadrado cuya superficie es (b^2-c^2). Como también se conoce b-c, aplicando el teorema de Pitágoras, se va a obtener con estos dos datos el triángulo CEF rectángulo en E. La diferencia de la hipotenusa FC=b y el cateto FE=c es el segmento conocido (C)E, al hacer la mediatriz de (C)C se corta con la recta (C)E en el vértice F y se obtienen los lados b y c. Se reduce el problema a resolver un triángulo dados los tres lados.

Segundo método, por la combinación de dos cuaternas armónicas.

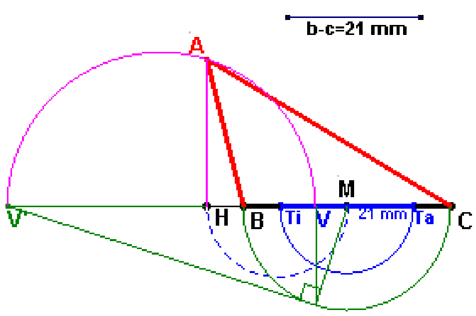


La primera cuaterna armónica está relacionada con las circunferencias tangentes en el vértice A. En un triángulo los extremos de la bisectriz interior Va son los centros de homotecia de la circunferencia inscrita y la exinscrita del vértice A. Al proyectar la cuaterna armónica A-V-In-Oa en el lado a, resulta la cuaterna H-V-Ti-Ta. H y V son los pies de la altura Ha y la bisectriz Va, y Ti y Ta son los puntos de tangencia de la inscrita y la exinscrita del ángulo A, cuya distancia es (b-c).
Con esta cuaterna se obtiene el pie de la bisectriz interior V.
La otra cuaterna está formada por los pies de las bisectrices V' y V del vértice A, con los vértices B y C.



Con esta cuaterna se obtiene el pie de la bisectriz exterior V'. Conociendo los dos pies de las bisectrices, el vértice A pertenece al arco capaz de 90º del segmento V'V.

Resolución del ejercicio



El vértice A se obtiene por la intersección de dos lugares geométricos. El primero es inmediato, la perpendicular al lado a por H.
El segundo es el arco capaz de 90º del segmento formado por los pies V y V' de las bisectrices.
Se comienza obteniendo el punto V con la terna TaTiH, luego se utiliza a cuaterna CBVV' de la cual se tiene la terna CBV y se halla V'.
La intersección de la recta base de la altura y del arco capaz de 90º entre V'V resulta el vértice A.