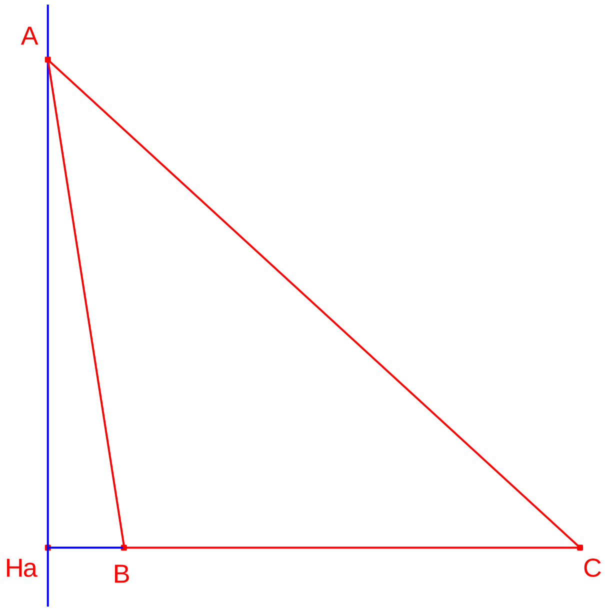
Problema 834

Construirun triángulo dados en posición B, C y H_a (pie de la altura de A) y conocido $b-c$.

Propuesto por Julián Santamaría Tobar.

Solución Ricard Peiró i Estruch:

Supongamos que B es obtuso.



Sea $d=b+c$, $m=\overline{BH_a}\leq\frac{a}{2}$.

$\overline{CH_a}=a+m$.

Aplicando el teorema de Pitágoras a los triángulos rectángulos $\overset{\Delta}{AH_aB}$, $\overset{\Delta}{AH_aC}$:

$\overline{AH_a}^2=c^2-m^2$, $\overline{AH_a}^2=b^2-(a+m)^2$.

Igualando les expresiones:

$b^2-c^2=a(2m+a)$.

$(c+b)(c-b)=a(2m+a)$:

$\begin{cases} c-b=\dfrac{a(2m+a)}{d} \\ b+c=d \end{cases}$. Sumando las dos expresiones:

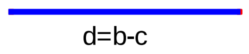
$2b=\dfrac{a(2m+a)}{d}+d$.

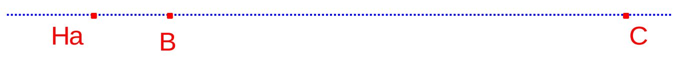
Sea $x=\dfrac{a(2m+a)}{d}$.

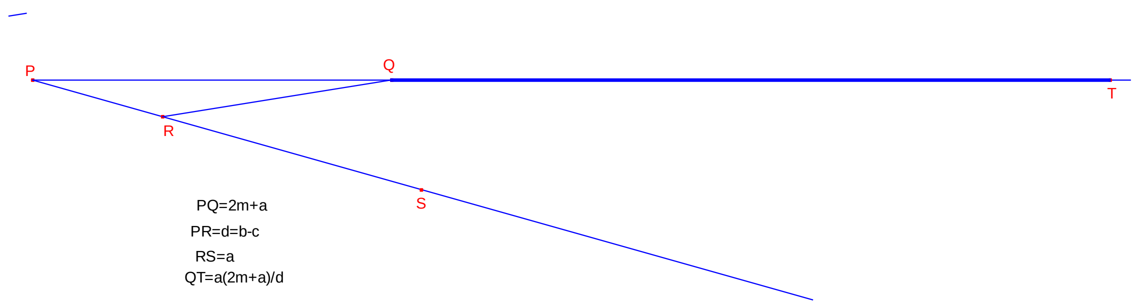
$\dfrac{x}{a}=\dfrac{2m+a}{d}$.

Pasos de la construcción:

a) Construimos x como cuarto proporcional:

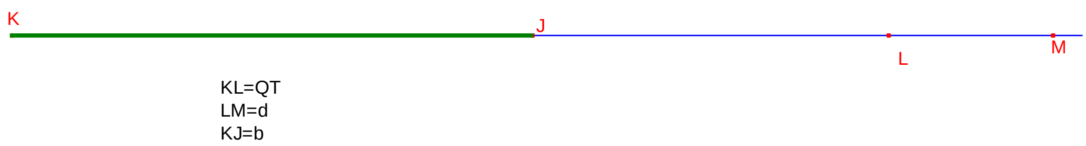




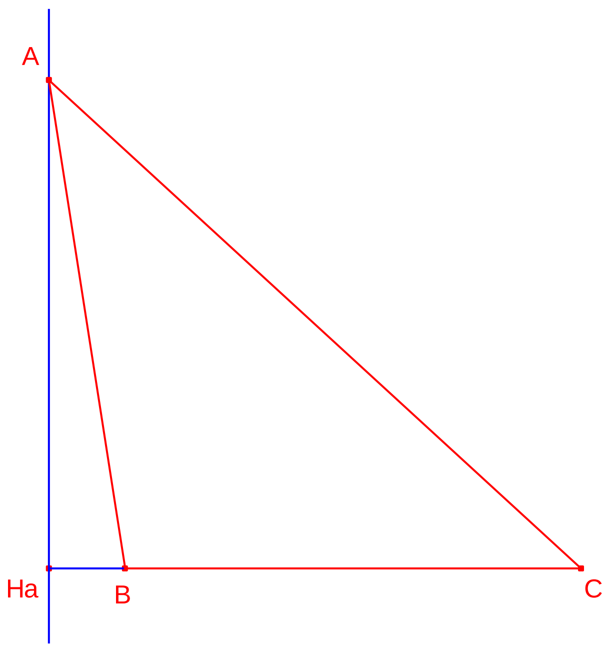


b) Construimos $\overline{KM} = x + d$

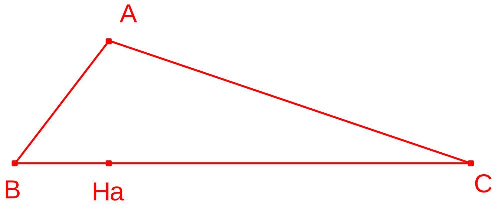
c) Construimos $b = \dfrac{\overline{KM}}{2}$



d) Dibujamos el triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$



Supongamos que B es agudo $B \geq C$



Sea $d = b + c$, $m = \overline{BH_a} \leq \frac{a}{2}$.

$\overline{CH_a} = a - m$.

Aplicando el teorema de Pitágoras a los triángulos rectángulos $\overset{\Delta}{AH_aB}$, $\overset{\Delta}{AH_aC}$:

$\overline{AH_a}^2 = c^2 - m^2$, $\overline{AH_a}^2 = b^2 - (a-m)^2$.

Igualando las expresiones:

$b^2 - c^2 = a(a-2m)$.

$(c+b)(c-b) = a(a-2m)$:

$\begin{cases} c - b = \dfrac{a(a-2m)}{d} \\ b + c = d \end{cases}$. Sumando las dos expresiones:

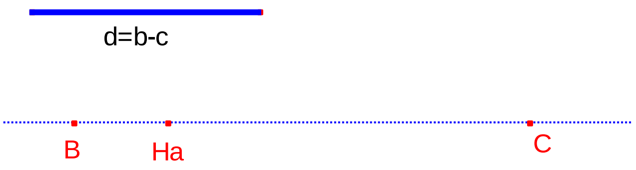
$2b = \dfrac{a(a-2m)}{d} + d$.

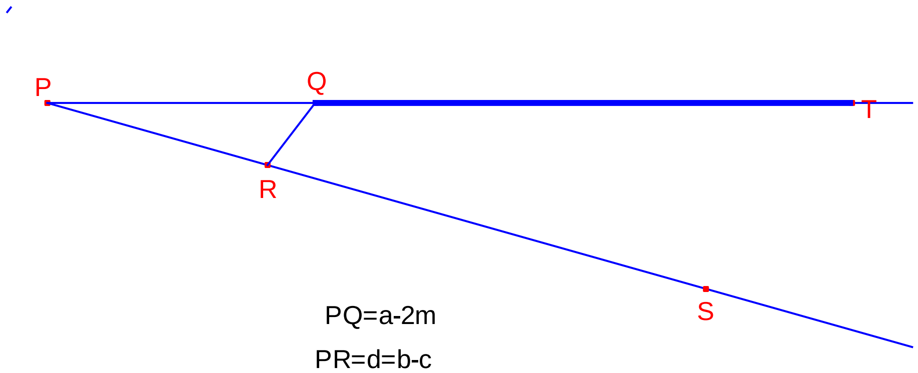
Sea $x = \dfrac{a(a-2m)}{d}$.

$\dfrac{x}{a} = \dfrac{a-2m}{d}$.

Pasos de la construcción:

a) Construimos x como cuarto proporcional:





PQ=a-2m

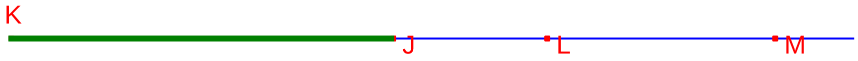
PR=d=b-c

RS=a

QT=a(a-2m)/d

b) Construimos $\overline{KM} = x + d$

c) Construimos $b = \dfrac{\overline{KM}}{2}$



KL=QT
LM=d
KJ=b

d) Dibujamos el triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$