Capítulo 18

El Ortopolo

En este capítulo estudiaremos el concepto del ortopolo de una recta respecto a un triángulo. Para definir ortopolo necesitamos el siguiente teorema (ver el problema 7, pág. 131).

Teorema 18.1 *Dados un triángulo $\triangle ABC$ y una recta s, si S_A, S_B y S_C son las proyecciones de los vértices del triángulo en la recta s, entonces las rectas s_A, s_B y s_C perpendiculares a los lados del triángulo que pasan por los puntos S_A, S_B y S_C son concurrentes en un punto S.*

Demostración: Las mediatrices de S_BS_C, S_CS_A y S_AS_B pasan por los puntos medios de los lados del triángulo L, M y N respectivamente. Por lo tanto el círculo $\mathcal{C}_L$ (resp. $\mathcal{C}_M$; resp $\mathcal{C}_N$) con centro L (resp. M; resp. N) que pasa por S_B (resp. S_C; resp. S_A) pasa por S_C (resp. S_A; resp. S_B). Por lo tanto el eje radical de $\mathcal{C}_L$ y $\mathcal{C}_M$ (resp. $\mathcal{C}_M$ y $\mathcal{C}_N$; resp. $\mathcal{C}_N$ y $\mathcal{C}_L$) es s_A (resp. s_B; resp. s_C) ya que es perpendicular a LM y pasa por S_C; por lo tanto S es el centro radical de $\mathcal{C}_L$, $\mathcal{C}_M$ y $\mathcal{C}_N$. ∎

Definición 18.2 *Dados un triángulo $\triangle ABC$ y una recta s, el punto S definido en el teorema anterior se llama el ortopolo de s respecto al triángulo $\triangle ABC$.*

El siguiente teorema que es una importante extención del teorema 3.70, pág. 3.70.

Teorema 18.3 *Dado un cuadrilátero completo, entonces los ortocentros de los triángulos formados por los lados del cuadrilátero tomados tres a tres están en una recta h. Los ortopolos de cada uno de los lados respecto al triángulos formados por los otros tres lados están en la misma recta h.*

Demostración: La primera parte no es más que el teorema 3.70. Esto es, los ortocentros H_a, H_c, H_b y H_d están en una recta h.

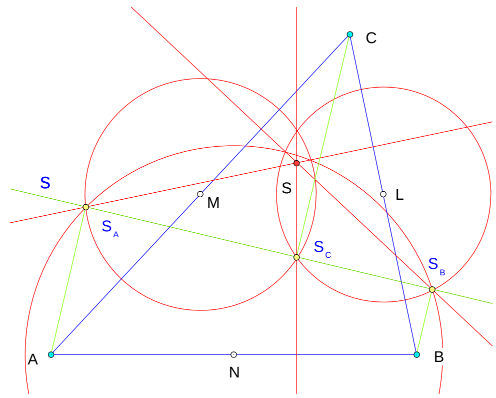

Figura 18-1

Sean Y y Z las proyecciones de B' y C' en a y tenemos que $B'X$ y $C'Y$ son las alturas del triángulo $\Delta A'B'C$ y $\Delta A'BC'$. Sean I_a, I_b y I_c los puntos en la recta al infinito definidos por las direcciones perpendiculares a las rectas a, b y c, entonces en la recta Pappus $\left\{\begin{smallmatrix} A'YZ \\ I_aI_bI_c \end{smallmatrix}\right\}$ están los puntos $H_c = A'I_b \cap YI_a$, $H_b = A'I_c \cap ZI_a$ y $S = YI_c \cap ZI_b$. Por lo tanto $\left\{\begin{smallmatrix} A'YZ \\ I_aI_bI_c \end{smallmatrix}\right\}$ coincide con h y S es ortopolo de la recta a respecto al $\Delta AB'C'$. $\blacksquare$

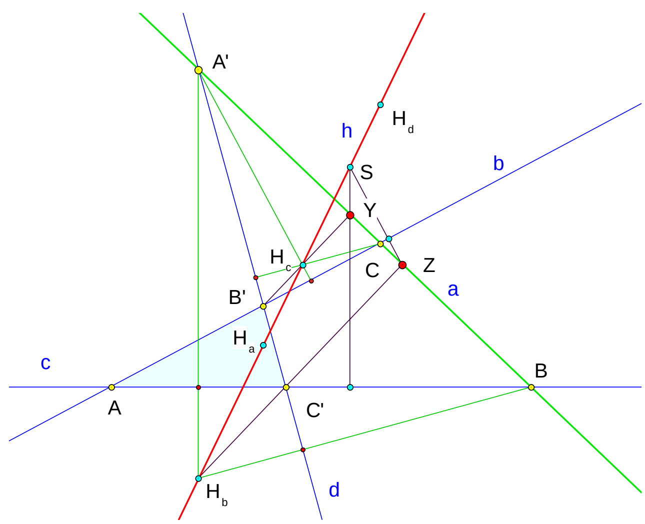

Figura 18-2

Nota: La existencio del ortopolo se sigue de la demostración anterior.

Necesitaremos el siguiente resultado.

Teorema 18.4 *Dados un triángulo $\triangle ABC$ y dos rectas paralelas s y s' con ortopolos S y S' respectivamente, entonces $SS' \perp s$ y SS' es igual a la distancia (con todo y dirección) de s a s'.*

Demostración: Claramente $S_AS'_A$ y $S_CS'_C$ son iguales y paralelos. Sea S'' tal $S_AS'_A \parallel SS''$ y $S_AS'_A = SS''$, claramente tenemos los parelogramas $S_AS'_AS''S$ y $S_CS'_CS''S$. Por lo tanto $S'_AS'' \perp a$ y $S'_CS'' \perp c$, esto es $S' = S''$. $\blacksquare$