ORTHOPÔLE D'UNE DROITE

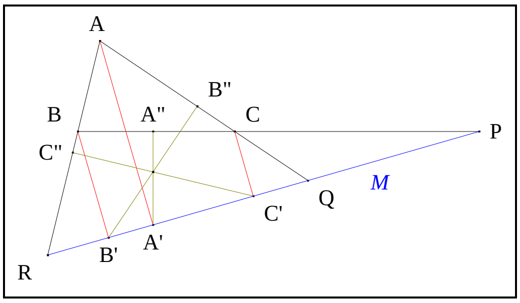
RELATIVEMENT

À

UN TRIANGLE

†

Jean-Louis AYME



Résumé. Nous présentons une preuve purement synthétique de l'orthopôle d'une ménélienne d'un triangle ainsi qu'une approche à partir de la droite de Simson-Wallace.
Les théorèmes cités en annexe peuvent être tous démontrés synthétiquement.

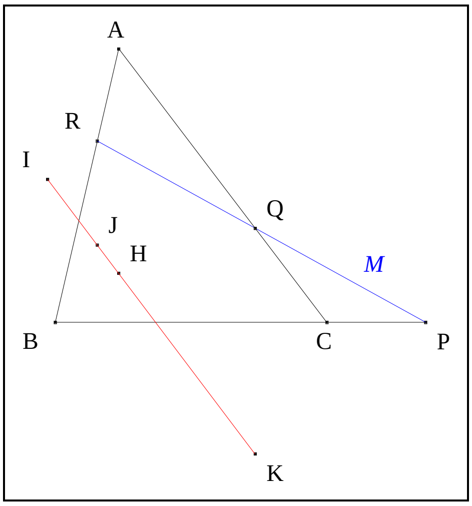
Sommaire

I. JOSEPH NEUBERG (1840-1926) ET RENÉ GOORMAGHTIGH (1893-1960)

1. La droite de Steiner d'un quadrilatère complet[1]

VISION

Figure :

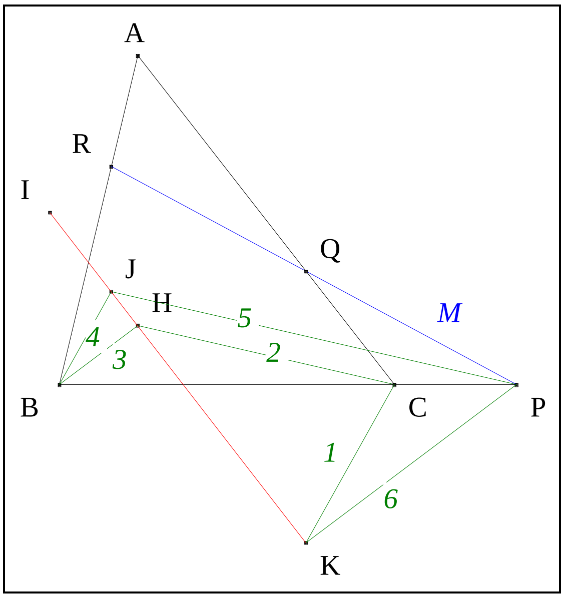


Traits : ABC un triangle,
M une ménélienne,
P, Q, R les points d'intersection de *M* avec (BC), (CA), (AB)
et I, J, K, H les orthocentres resp. des triangles ARQ, BPR, CPQ, ABC.

Donné : I, J, K et H sont alignés.

VISUALISATION

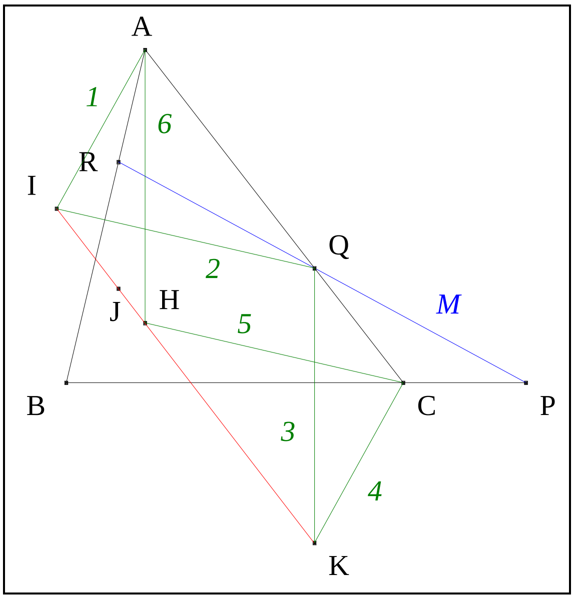
[1] Steiner J., *Annales de Gergonne*, 18 (1827-28) 302-304, proposition 4 ;
reprinted in *Gesammelte Werke*, 2 volumes, edited by Weierstrass K. (1881) ; Chelsea reprint.
Steiner J., *Journal* de Crelle 2 (1827) 97.



- Par définition d'une hauteur, (BH)⊥ (AC) et (AC)⊥ (PK);
  d'après l'axiome IVa des perpendiculaires, (BH) // (PK).

- Mutatis mutandis, nous montrerions que (CH) // (PJ) et (CK) // (BJ).

- D'après Pappus "Le petit théorème" (Cf. Annexe 1)
  appliqué à l'hexagone KCHBJPK, J, K et H sont alignés.



- Par définition d'une hauteur, (AH)⊥ (BC) et (BC)⊥ (QK);
  d'après l'axiome IVa des perpendiculaires, (AH) // (QK).

- Mutatis mutandis, nous montrerions que (CH) // (QI) et (AI) // (CK).

- D'après Pappus "Le petit théorème" (Cf. Annexe 1)
  appliqué à l'hexagone AIQKCHA, I, K et H sont alignés.

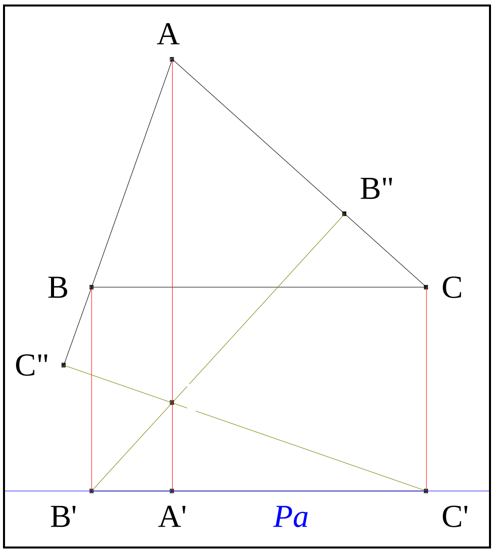
- **Conclusion :** d'après l'axiome d'incidence Ia, I, J, K et H sont alignés.

Énoncé traditionnel : les quatre orthocentres des quatre triangles formés par quatre droites qui se coupent deux à deux, sont alignés.

Note historique : En 1828, le géomètre de Berlin, Jacob Steiner propose dix questions, sans démonstration, dans les *Annales* de Gergonne. Le résultat précédent correspond à la quatrième question.
L'année suivante, Franz Heinen en donne une démonstration analytique dans le *Journal* de Crelle[2]. En 1870, L. Millet, professeur au lycée de Laval, attribue ce résultat à Paul Aubert, professeur à Rennes, dans son ouvrage intitulé *Principales méthodes de la Géométrie moderne* à la page 176.
Plus tard, Bodenmiller attribuera ce résultat à William Gallatly.
La preuve présentée s'inspire de celle de Darij Grinberg et d'Atul Dixit[3], qui date de 2004.

Scolie : (IJKH) est la droite de Steiner ou la droite orthocentrique ou encore la droite d'Aubert du delta déterminé par ABC et *M*.

2. Orthopôle d'une parallélienne relativement à un triangle[4]



Traits : ABC un triangle,
*P*a une A-parallélienne (Cf. Annexe 2),
A', B', C' les pieds des perpendiculaires abaissées resp. de A, B, C sur *P*a
et A", B", C" les pieds des perpendiculaires abaissées resp. de A' sur (BC), de B' sur (CA), de C' sur (AB).

Donné : (AA'), (B'B") et (C'C") sont concourantes.

Commentaire : la preuve se calque sur celle présentée dans la généralisation suivante.

Note historique : en 1875, Joseph Neuberg introduit le concept d'orthopôle en considérant un

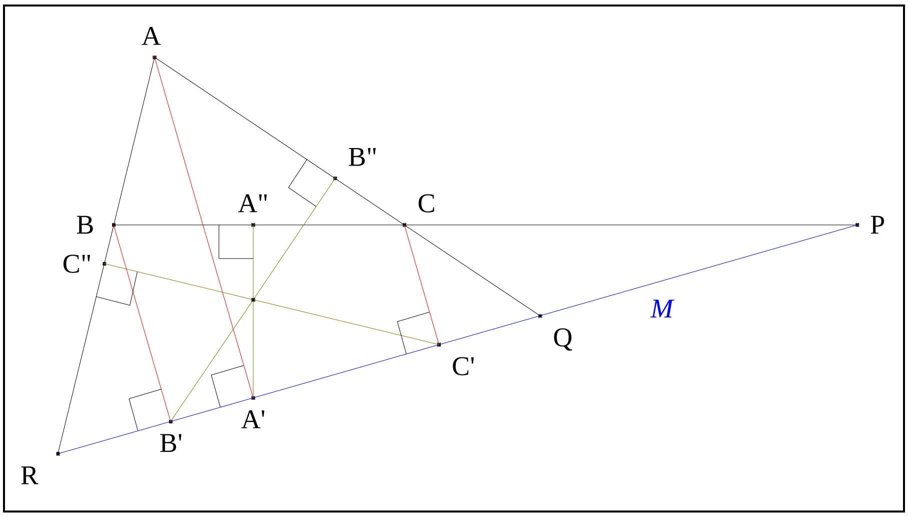
[2] Heinen, *Crelle* 3 (1828) 290.
[3] Dixit A. and Grinberg D., Orthopoles and Pappus Theorem, *Forum Geometricorum* vol. 4 (2004) 53-59.
[4] Neuberg J., Question 111, *Nouvelles Correspondances Mathématiques*, Tome II (1875) 189, 311.
Neuberg J., *Nouvelles Correspondances Mathématiques*, Tome IV (1878) 379.

triangle et une droite parallèle à l'un de ses côtés.
En 1914, il étend ce concept en considérant des isoclines, et remplace "orthopôle" par isopôle[5].

3. Orthopôle d'une ménélienne relativement à un triangle[6]

VISION

Figure :

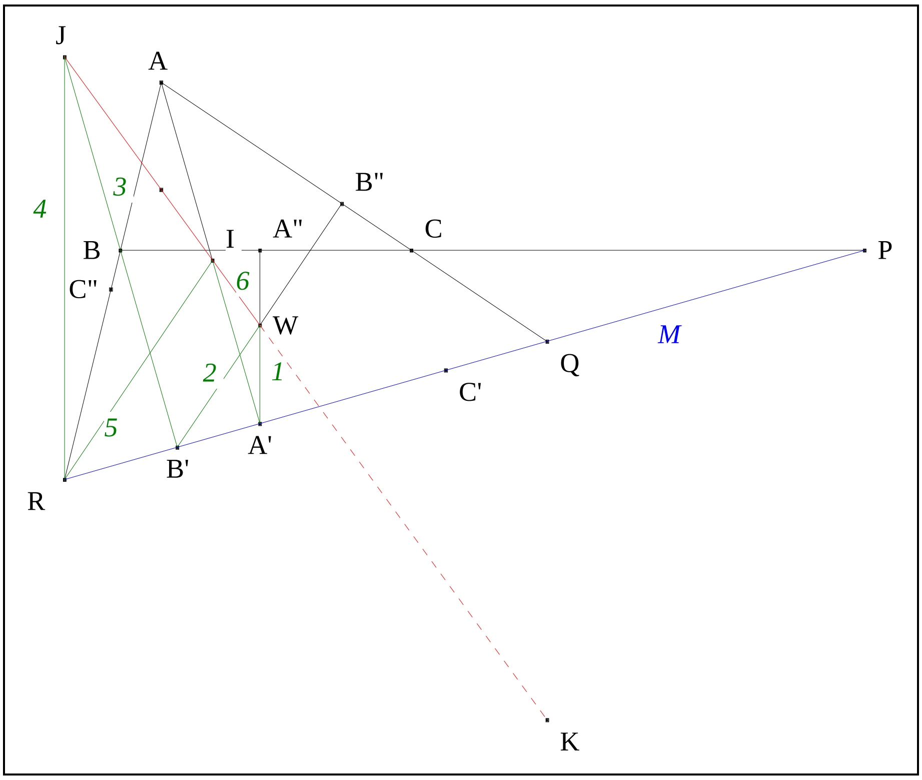


Traits :	ABC	un triangle,
	M	une ménélienne de ABC,
	P, Q, R	les points d'intersection de *D* resp. avec (BC), (CA), (AB),
	A', B', C'	les pieds des perpendiculaires abaissées resp. de A, B, C sur *M*,
et	A", B", C"	les pieds des perpendiculaires abaissées resp. de A' sur (BC), de B' sur (CA), de C' sur (AB).

Donné : (A'A"), (B'B") et (C'C") sont concourantes.

VISUALISATION

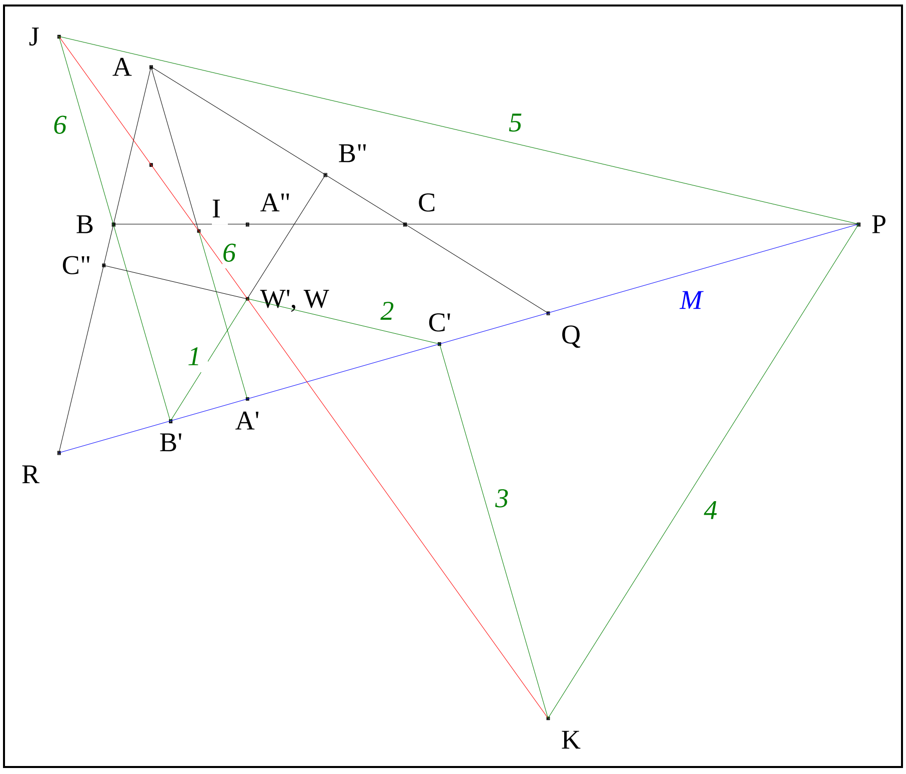
[5] Neuberg J., Généralisation de l'orthopôle, *Mathesis* (4) 4 [34] (1914) 89-93.
[6] Goormaghtigh, Question 2388, *Nouvelles Annales de mathématiques*, Série **4**, 19 (1919) 39.



- Notons I, J, K les orthocentres resp. des triangles ARQ, BPR, CPQ
  et W le point d'intersection de (A'A") et (B'B").

- **Scolies :** **(1)** (A'W) // (RJ) , (B'W) // (RI) , (B'J) // (A'I)
  (2) (IJK) est la droite de Steiner du delta déterminé par ABC et *M*.

- D'après Pappus "Le petit théorème" (Cf. Annexe 1)
  appliqué à l'hexagone A'WB'JRIA', I, J et W sont alignés.



- Notons W' le point d'intersection de (B'B") et (C'C").

- **Scolies :** (B'W') // (PK) , (C'W') // (PJ) , (C'K) // (B'J).

- D'après Pappus "Le petit théorème" (Cf. Annexe 1)
  appliqué à l'hexagone B'W'C'KPJB', J, K et W' sont alignés ;
  en conséquence, W' et W sont confondus.

- **Conclusion :** (A'A"), (B'B") et (C'C") sont concourantes.

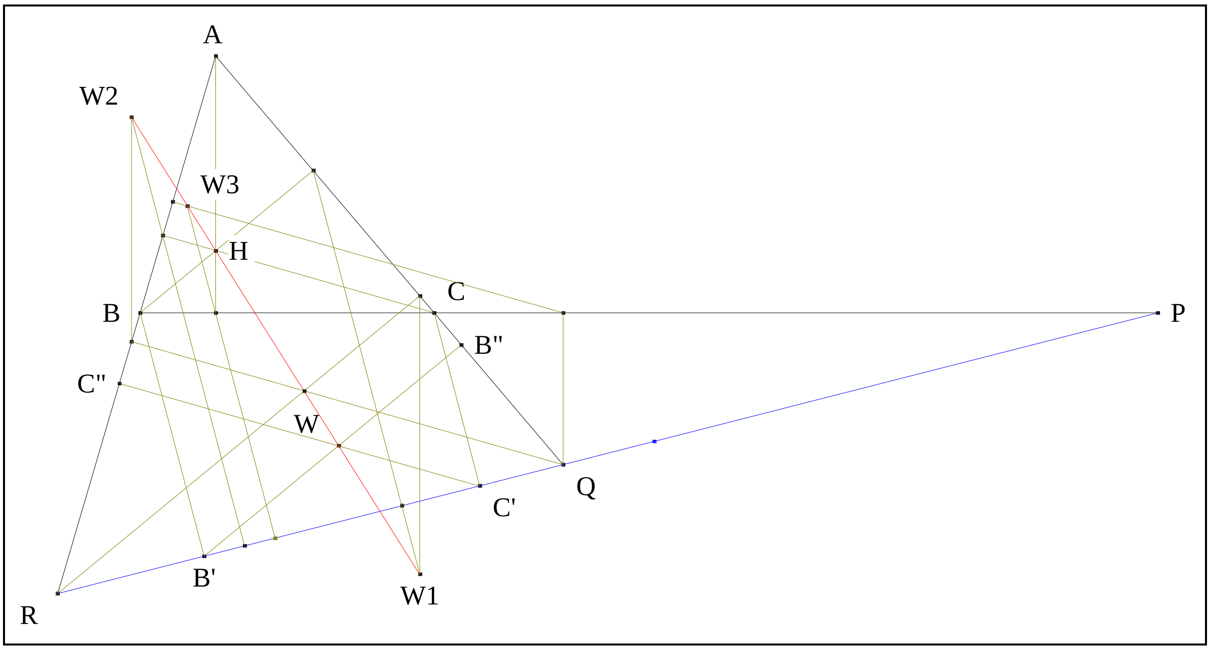
Commentaire : les preuves métriques usuelles de ce résultat ont recours aux triangles semblables[7] ou au théorème de Carnot[8].

Note historique : En 1919, René Goormaghtigh généralise le résultat de Joseph Neuberg de 1875, comme question à chercher, au cas d'une ménélienne comme le fera la même année John Wenworth Clawson[9].
La preuve ci-dessus s'inspire de celle de Darij Grinberg et d'Atul Dixit [10], qui date de 2004.

Scolies : **(1)** W est "l'orthopôle de *M* relativement à ABC"
et, inversement,
"*M* est la droite orthopolaire de W relativement à ABC" ;
cette terminologie a été proposée par Joseph Neuberg en 1911, dans la revue belge *Mathesis*[11].

(2) W est sur la droite de Steiner (IJK) du delta déterminé par ABC et *M*.

(3) Trois autres orthopôles



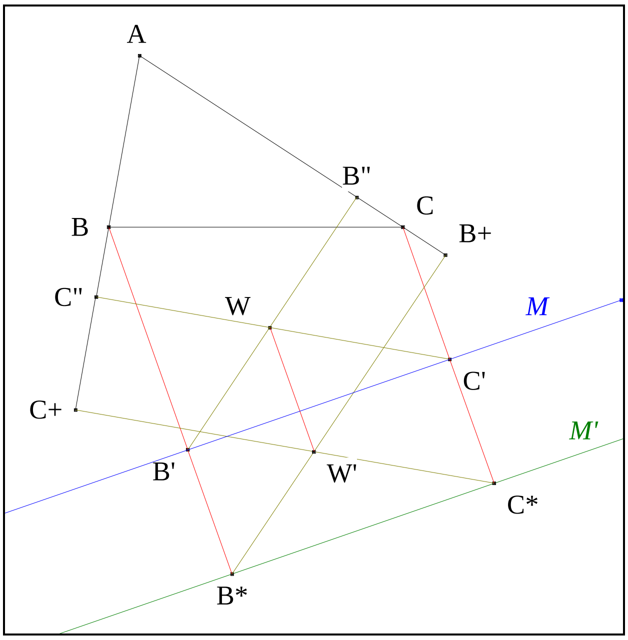
[7] Bogomolny A., Orthopole, http://cut-the-knot.com/Curriculum/Geometry/Orthopole.shtml.
Honsberger R., *Episodes of 19th and 20th Century Euclidean Geometry*, Math. Assoc. America (1995) 125-136.
[8] Grinberg D., Orthopole A new proof, Message *Hyacinthos* # 7002 du 18/04/2003.
[9] Clawson J. W., The complete quadrilateral, *Annals of Mathematics*, Se. 2, 20 (1919) 232-261.
[10] Dixit A. and Grinberg D., Orthopoles and Pappus Theorem, *Forum Geometricorum* vol. 4 (2004) 53-59.
[11] Neuberg J., *Mathesis* (1911) 244.

- Notons W1, W2, W3 les orthopôles resp. de (BC) relativement au triangle ARQ, de (CA) relativement au triangle BPR, de (AB) relativement au triangle CPQ.

- **Conclusion :** mutatis mutandis, nous montrerions que **(1)** W1 est sur (IJK)
  (2) W2 est sur (IJK)
  (3) W3 est sur (IJK).

Énoncé traditionnel : les orthopôles de chacune des 4 droites d'un delta relativement aux triangles formés par les trois autres droites, sont alignés sur la droite de Steiner de ce delta.

(4) Une ménélienne *M'* parallèle à *M*



- Notons *M'* une parallèle à *M*,
  B*, C* les pieds des perpendiculaires abaissées resp. de B, C sur *M'*
  B+, C+ les pieds des perpendiculaires abaissées resp. de B* sur (CA), de C* sur (AB).
  et W' l'orthopôle de *M'* relativement à ABC.

- **Conclusion :** d'après Desargues "Le petit théorème" (Cf. Annexe 3) appliqué aux triangles homothétiques W' B*C* et WB'C', (WW') // (B'B*).

- Le quadrilatère WB'B*W' étant un parallélogramme, WW' = B'B*.

Énoncé : *si,* une droite se déplace parallèlement à elle-même,
alors, l'orthopôle de cette droite se déplace sur une droite perpendiculaire à celle-ci.

II. MODESTE SOONS ET WILLIAM GALLATLY

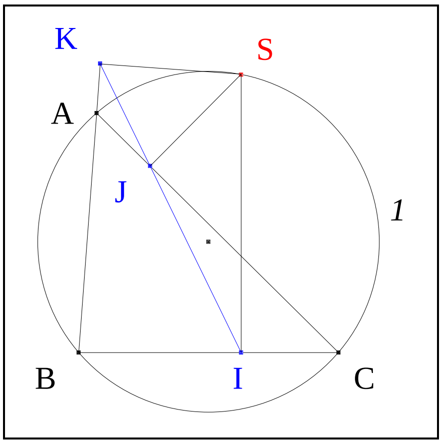
1. La droite de Simson-Wallace[12]

---

[12] Wallace, *Leybourne's* mathem. repository (old series) 2 (1798) 111.

VISION

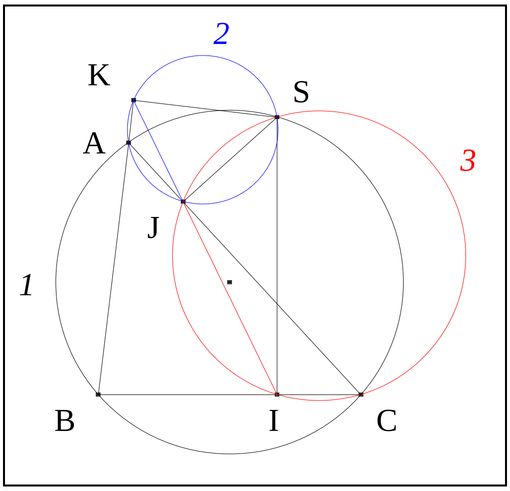
Figure :



Traits : ABC un triangle non rectangle,
1 le cercle circonscrit à ABC,
S un point
et I, J, K les pieds des perpendiculaires abaissées de S resp. sur (BC), (CA), (AB).

Donné : S est sur *1* *si, et seulement si,* I, J, K sont alignés.

VISUALISATION NÉCESSAIRE



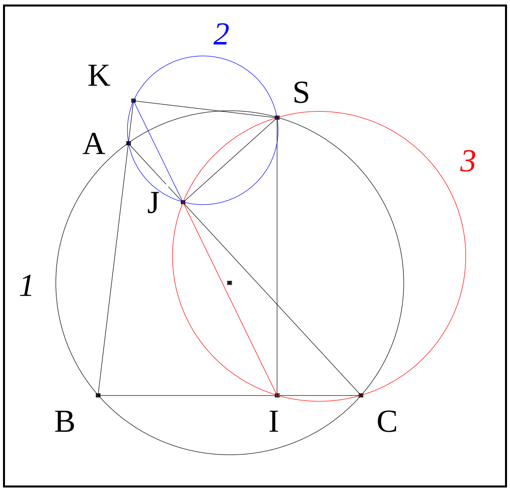
- Notons *2* le cercle de diamètre [SA] ; il passe par J et K ;
  3 le cercle de diamètre [SC] ; il passe par I et J.

- **Conclusion :** d'après "Le point de Miquel-Wallace" (Cf. Annexe 4)
  appliqué à ABC avec I sur (BC), J sur (CA), K sur (AB), I, J et K sont alignés.

Énoncé traditionnel : *si,* d'un point pris sur le cercle circonscrit à un triangle,
on abaisse des perpendiculaires sur chaque côté du triangle,
alors, les trois points obtenus sont alignés.

Scolie : (IJK) est la droite de Simson-Wallace de pôle S relativement à ABC ;
plus brièvement, (IJK) est la S-simsonienne relativement à ABC.

VISUALISATION SUFFISANTE



- Notons *2* le cercle de diamètre [SA] ; il passe par J et K ;
  3 le cercle de diamètre [SC] ; il passe par I et J.

- D'après "Le point de Miquel-Wallace" (Cf. Annexe 4) appliqué à ABC et à (IJK), *1*, *2* et *3* sont concourants.

- **Conclusion :** S est sur *1*.

Note historique : bien que l'historien d'Edimburgh, John Sturgeon. Mackay[13] n'ait trouvé aucune trace de la droite dite "de Simson" dans ses oeuvres, il montra que cette erreur en paternité provenait du géomètre français François Joseph Servois qui écrivait en 1814 :

"le théorème suivant, qui est, je crois, de Simson..."[14].

Cette erreur allait être reprise par Jean Victor Poncelet[15] qui, en omettant la remarque de Servois, allait perpétuer définitivement ce fait.
C'est en 1799 que William Wallace[16] découvrait "cette droite", bien après la mort de Simson en 1768, à Glasgow.

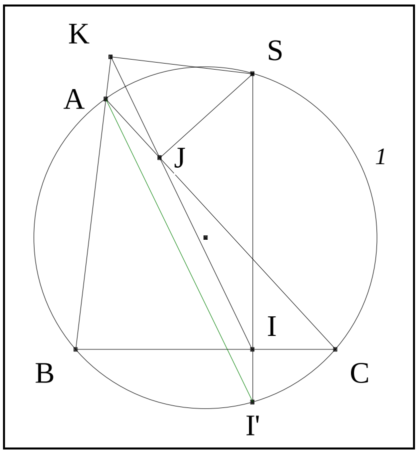
2. Direction d'une droite de Simson-Wallace[17]

VISION

Figure :

---

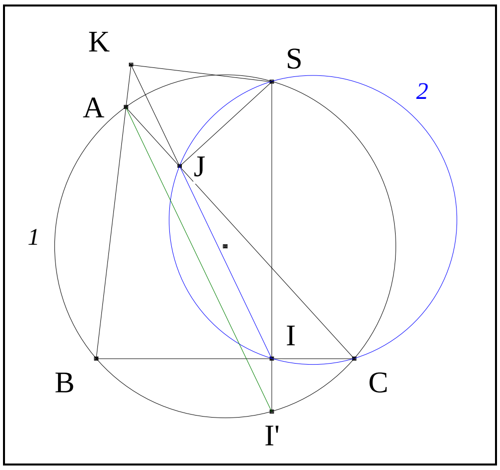
13 MacKay J. S., *Proceedings Edinburgh Math Soc.*, (1890-1891) 83.
14 Servois, *Annales de Gergonne* 4 (1813-14) 250-251.
15 Poncelet J. V., *Traité des propriétés projectives des figures* (1822).
16 Wallace (1768-1843), *Leybourne's* mathem. repository (old series) 2 (1798) 111.
17 Heinen, *Journal de Crelle* 3 (1828) 285-287.



Traits : ABC un triangle,
1 le cercle circonscrit à ABC,
S un point de *1*,
I, J, K les pieds des perpendiculaires abaissées de S resp. sur (BC), (CA), (AB)
et I' le second point d'intersection de (SI) avec *1*.

Donné : (AI') et (IJK) sont parallèles.

VISUALISATION



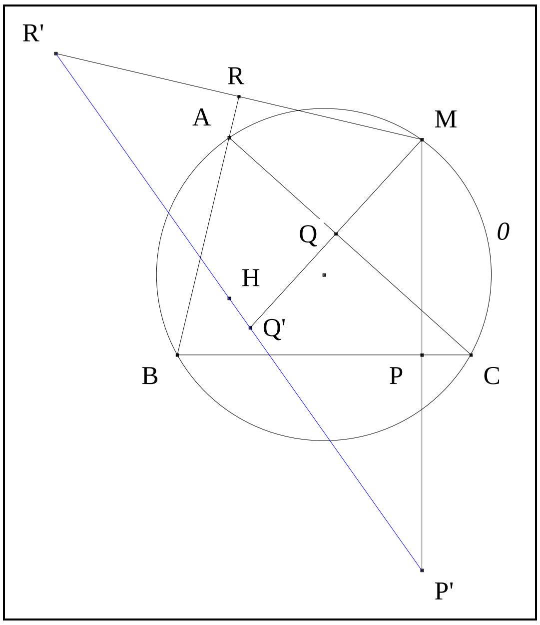
- **Scolie :** (IJK) est la droite de Simson de pôle S.
- Notons *2* le cercle de diamètre [SC] ; il passe par I et J.
- Les cercles *1* et *2*, les points de base C et S, les moniennes (ACJ) et (I'SI), conduisent au théorème **0** de Reim ; il s'en suit que (AI') // (IJK) .
- **Conclusion :** (AI') et (IJK) sont parallèles.

3. La droite de Steiner d'un triangle[18]

VISION

[18] Steiner J..

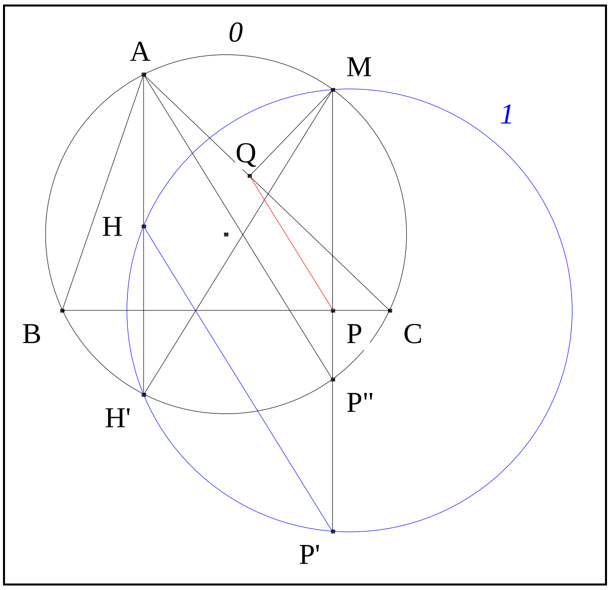
Figure :



Traits :	ABC	un triangle,
	H	l'orthocentre de ABC,
	0	le cercle circonscrit à ABC,
	M	un point de *0*,
	P, Q, R	les pieds des perpendiculaires abaissées de M resp. sur (BC), (CA), (AB)
et	P', Q', R'	les symétriques de M resp. par rapport à (BC), (CA), (AB).

Donné : H, P', Q' et R' sont alignés.

VISUALISATION



- Notons H' le symétrique de H par rapport à (BC)
  et P" le second point d'intersection de (MP) avec *0*.

- D'après Carnot "Symétrique de l'orthocentre par rapport à un côté" (Cf. Annexe 5), H' est sur *0*.

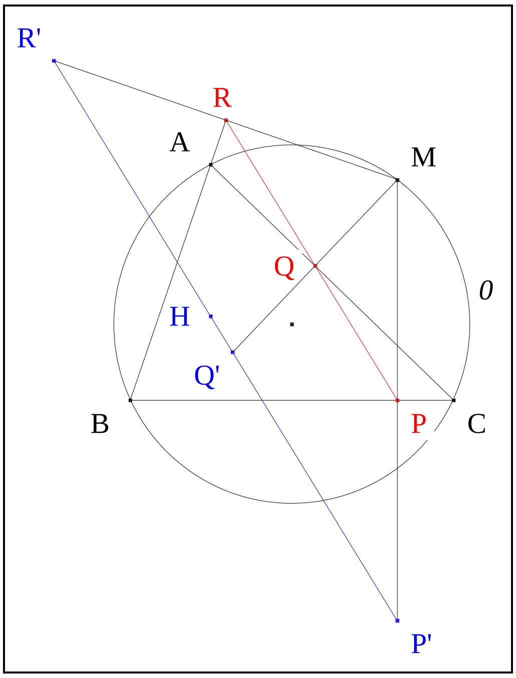
- Le quadrilatère HH'P'M est un trapèze et (BC) est la médiatrice des bases [HH'] et [MP'] ;
  en conséquence, le trapèze HH'P'M est cyclique.

- Notons *1* ce cercle.

- Les cercles *1* et *0*, les points de base H' et M, les moniennes (HH'A) et (P'MP"),
  conduisent au théorème 0 de Reim ; il s'en suit que (HP') // (AP").

- **Scolies :** **(1)** (PQR) est la droite de Simson de pôle M du triangle ABC
  (2) d'après II. 2. "Direction d'une droite de Simson", (AP") // (PQ).

- Par transitivité de la relation //, (HP') // (PQ).



- Notons R le pied de la perpendiculaire à (AB) passant par M
  et R' le symétrique de M par rapport à (AB).

- Mutatis mutandis, nous montrerions que (HQ') // (QR) et (HR') // (RP).

- D'après le postulat d'Euclide, (HP'), (HQ') et (HR') étant parallèles à (PQR), sont confondues.

- **Conclusion :** H, P', Q' et R' sont alignés.

Énoncé traditionnel : les symétriques d'un point M du cercle circonscrit à un triangle par rapport aux côtés de celui-ci, sont sur la droite de Steiner.

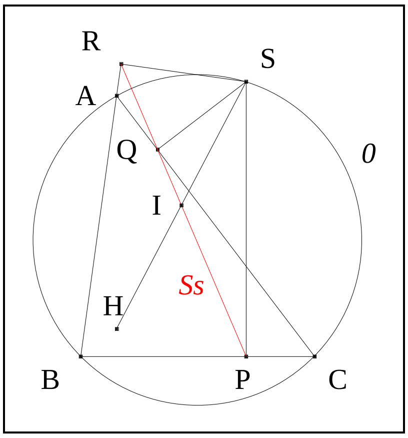
Scolies : **(1)** la droite passant par H', P', Q' et R est "la droite de Steiner de pôle M relativement à ABC".

(2) D'après Thalès "La droite des milieux",
la droite de Steiner est parallèle à la droite de Simson (PQR) de pôle M relativement à ABC.

4. Le milieu de [SH][19]

VISION

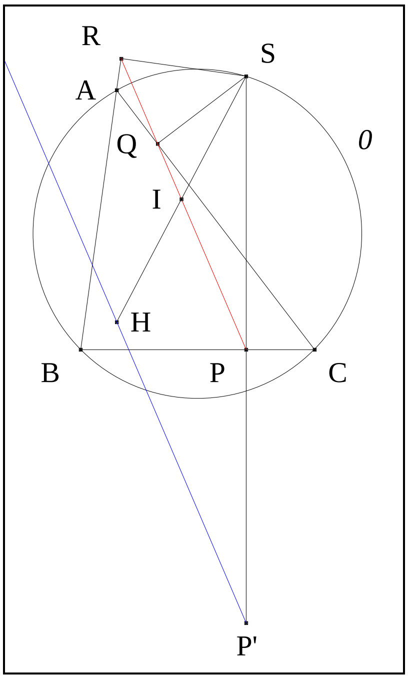
Figure :



Traits :	ABC	un triangle,
	H	l'orthocentre de ABC,
	0	le cercle circonscrit à ABC,
	S	un point de *0*,
	*S*s	la droite de Simson de pôle S relativement à ABC,
	P, Q, R	les points d'intersection de *S*s resp. avec (BC), (CA), (AB)
et	I	le point d'intersection de *S*s avec (SH).

Donné : I est le milieu de [SH].

VISUALISATION



[19] Cette question a été proposée en 1827-28 par Steiner dans les *Annales Mathématiques* 18 de Gergonne.

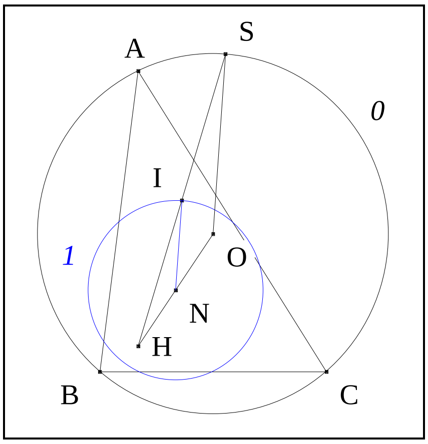
- Notons P' le symétrique de S par rapport à P.

- D'après II. 3. "La droite de Steiner d'un triangle",
  (P'H) est la droite de Steiner de S relativement à ABC et (P'H) // *S*s.

- **Conclusion :** d'après l'axiome de passage IIIb, I est le milieu de [SH].

Note historique : la première solution a été donnée par W. F. Walker[20] en 1867, par W. H. Besant[21] en 1878, par Retsin[22] en 1869, par Vigarié[23] en 1888, par McArthur[24].

Scolie : situation remarquable de I



- Notons O le centre de *0*
  1 le cercle d'Euler de ABC
  et N le centre de *1*.

- D'après Feuerbach "Le centre du cercle d'Euler" (Cf. Annexe 6), N est le milieu de [HO] ;
  d'après Thalès "La droite des milieux", appliqué au triangle ABC, 2.IN = OS.

- **Conclusion :** d'après Feuerbach "Le centre du cercle d'Euler" (Cf. Annexe 6),
  le rayon OS étant égal au diamètre du cercle d'Euler, I est sur *1*.

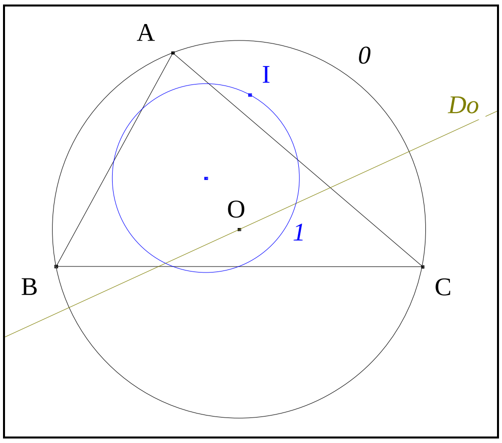
5. Orthopôle d'un diamètre[25]

VISION

Figure :

---

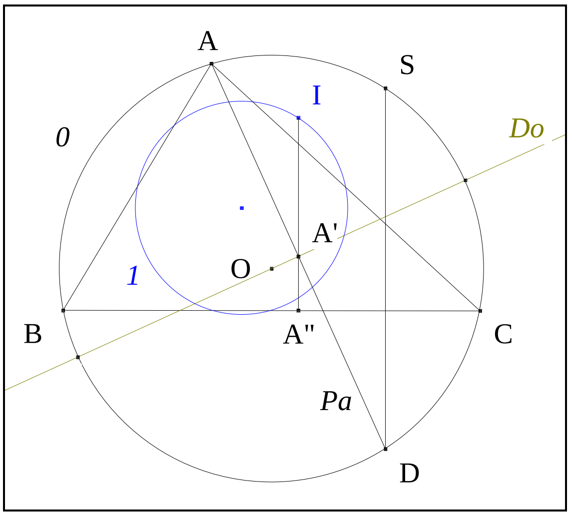
20 Walker W. F., *Quaterly Journal of Mathematics* 8 (1867) 47.
21 Besant W. H., *Quaterly Journal of Mathematics* 11 (1878) 41.
22 Retsin, *Nouvelles Annales* (2) 8 (1869) 530.
23 Vigarié E.., *Bourget* 12 (1888) 253.
24 *Notes*, Edinburgh Mathematical Society, (juillet 1910).
25 Soons M., Théorème de Géométrie, *Mathesis* **6** (1896) 57-59.



Traits : ABC un triangle,
0 le cercle circonscrit à ABC,
O le centre de *0*,
*D*o une droite diamétrale de *0*,
I l'orthopôle de *D*o relativement à ABC
et *1* le cercle d'Euler de ABC

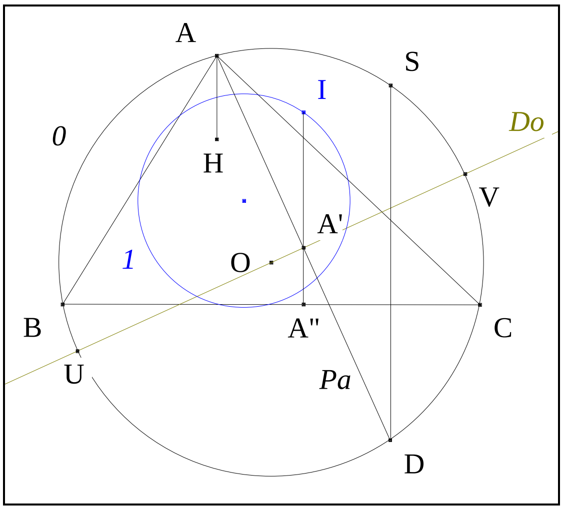
Donné : I est sur *1*.

VISUALISATION



- Notons *Pa* la perpendiculaire à *D*o passant par A,
  A' le pied de *P*a sur *D*o,
  D le second point d'intersection de *Pa* avec *0*,
  S le pôle de la droite de Simson de direction *Pa*
  et A" le pied de la perpendiculaire à (BC) passant par A'.

- La droite diamétrale *D*o étant perpendiculaire à la corde [AD], A' est le milieu de [AD].



- Notons H l'orthocentre de ABC.

- **Scolie :** S est le second point d'intersection de la perpendiculaire à (BC) passant par D avec *0*.

- Considérons la bande de frontières (AH) et (SD).

- **Scolie :** (A'A") est parallèle aux frontières de cette bande.

- D'après l'axiome de passage IIIb, (A'A") passant par le milieu A' de [AD],
  (A'A") passe par le milieu de [SH].

- Mutatis mutandis, nous montrerions que (B'B") passe par le milieu de [SH]
  (C'C") passe par le milieu de [SH].

- Par définition, ce milieu est l'orthopôle I de *Do* relativement à ABC.

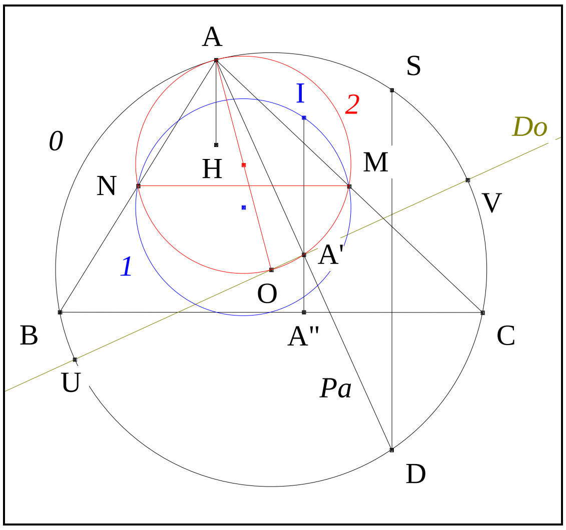
- **Conclusion :** d'après II. 4. "Le milieu de [SH]", I est sur *1*.

Énoncé traditionnel : l'orthopôle d'un diamètre d'un cercle circonscrivant un triangle, est sur le cercle d'Euler de celui-ci.

Commentaire : cette preuve s'inspire de celle de Ross Honsberger[26].

Scolie : avec le triangle médian de ABC

26 Honsberger R., Episodes in Nineteenth and Twentieth Century Euclidean Geometry, MAA, New Mathematical Library (1995) 129.



- Notons M, N les milieux resp. de [CA], [AB]
  et *2* le cercle de diamètre [AO] ; il passe par A', M et N.

- *2* est le symétrique de *1* par rapport à (MN).

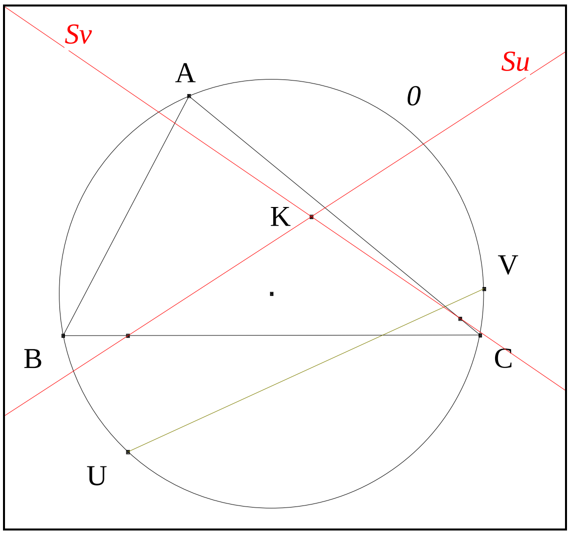
- (IA') étant perpendiculaire à (MN), I est le symétrique de A' par rapport à (MN).
  en conséquence, la symétrique de *D*0 par rapport à (MN) passe par I.

- **Conclusion :** les symétriques de *D*0 par rapport aux côtés du triangle médian de ABC passent par I.

6. Orthopôle d'une corde[27]

VISION

Figure :



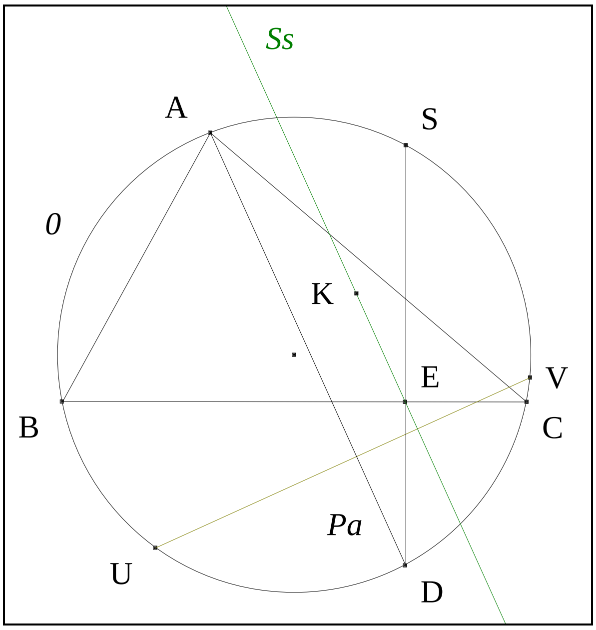
Traits : ABC un triangle,
0 le cercle circonscrit à ABC,

[27] Gallatly W., *The modern Geometry of the Triangle* (1922) 49.

	[UV]	une corde de *0*,
	K	l'orthopôle de (UV) relativement à ABC
et	*S*u, *S*v	les droites de Simson de pôle U, V relativement à ABC.

Donné : K est le point d'intersection de *S*u et *S*v.

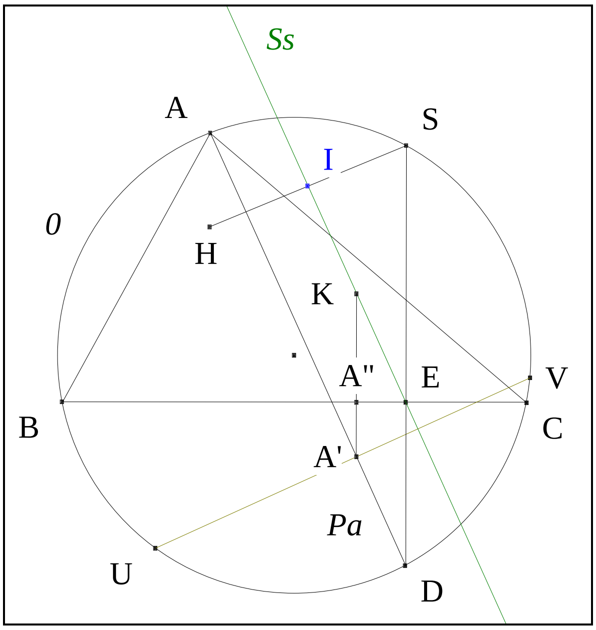
VISUALISATION



- Notons

	Pa	la perpendiculaire à (UV) passant par A,
	S	le pôle de la droite de Simson de direction *Pa*,
	*S*s	la droite de Simson de pôle P relativement à ABC,
	D	le second point d'intersection de *Pa* avec *0*
et	E	le point d'intersection de (DS) et (BC).

- **Conclusion partielle :** d'après II. 1. "La droite de Simson-Wallace", E est sur *S*s.



- Notons A' le pied de *P*a sur (UV),

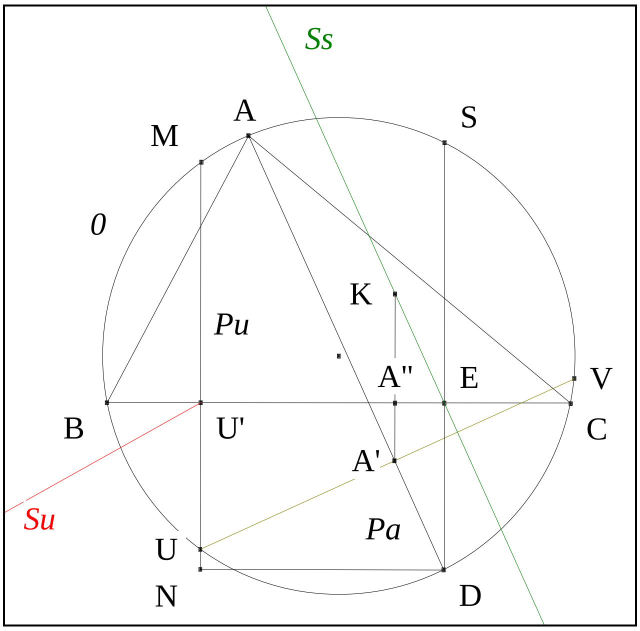
	A"	le pied de la perpendiculaire à (BC) passant par A',
	H	l'orthocentre de ABC
et	I	le milieu de [SH].

- **Scolie :** en se ramenant à la situation II. 5. "Orthopôle d'un d'un diamètre", *S*s passe par le milieu I de [SH].

- Par définition, K est sur (A'A").

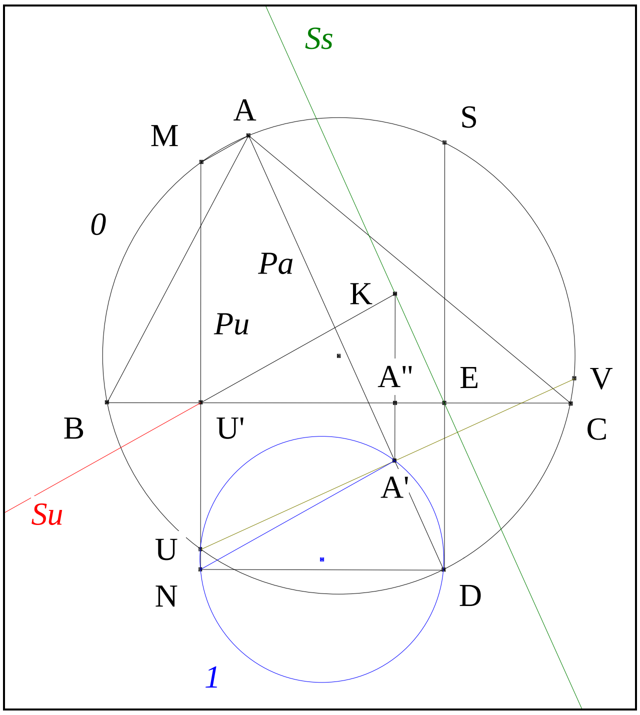
- D'après I. 3. "Orthopôle d'une ménélienne, scolie 4", K est sur *S*s.

- **Conclusion partielle :** K est le point d'intersection de *S*s et (A'A").



Notons	*P*u	la perpendiculaire à (BC) passant par U,
	U'	le point d'intersection de *P*u et (BC),
	M	le second point d'intersection de *P*u avec *0*,
	N	le pied de la perpendiculaire à *P*u passant par D
et	*S*u	la droite de Simson de pôle U relativement à ABC.

- **Conclusion partielle :** par définition, U' est sur *S*u.



- Notons *1* le cercle de diamètre [DU] ; il passe par A' et N.

- Les cercles *1* et *0*, les points de base U et D, les moniennes (NUM) et (A'DA), conduisent au théorème **0** de Reim ; il s'en suit que (NA') // (MA).

- Le quadrilatère KA'DE étant un parallélogramme, (KA') // (ED) et KA' = ED ;
  le quadrilatère EDNU' étant un rectangle, (ED) // (U'N) et ED = U'N ;
  par transitivité des relations // et =, (KA') // (U'N) et KA' = U'N ;
  en conséquence, le quadrilatère KA'NU' est un parallélogramme.

- Le quadrilatère KA'NU' étant un parallélogramme, (U'K) // (NA') ;
  nous avons : (NA') // (MA) ;
  par transitivité de la relation //, (U'K) // (MA).

- D'après II. 2. "Direction d'une droite de Simson-Wallace",
  U est le pôle de la droite de Simson-Wallace de direction (MA).

- U' étant sur *S*u et (U'K) étant parallèle à (MA), (U'K) = *S*u.

- **Conclusion partielle :** *S*u passe par K

- Mutatis mutandis, nous montrerions que *S*v passe par K.

- **Conclusion :** K est le point d'intersection de *S*u et *S*v.

Commentaire : cette preuve s'inspire de celle de Ross Honsberger[28] publiée en 1995.

Note historique : une autre preuve a été présentée par Trajan Lalesco[29] en 1916.

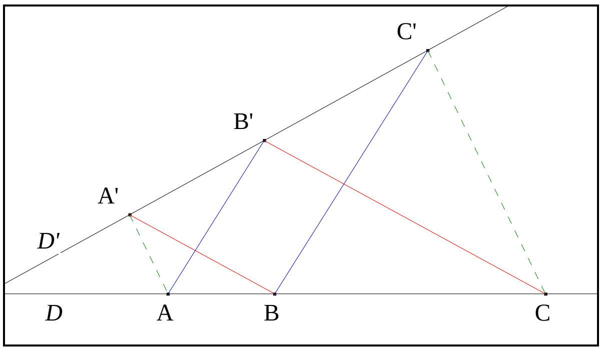
---

28 Honsberger R., Episodes in Nineteenth and Twentieth Century Euclidean Geometry, MAA, New Mathematical Library (1995) 130-132.

29 Lalesco T., *La Géométrie du Triangle*, Bucharest (1916) Rééditions Jacques Gabay, Paris (1987) 12-14.

ANNEXE

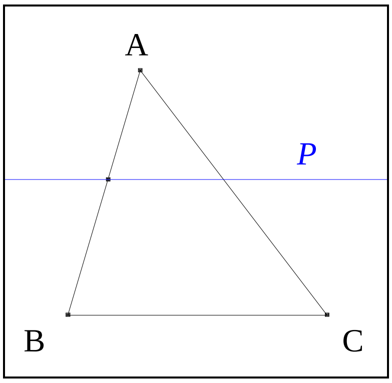
1. Le petit théorème de Pappus[30]



Traits :	*D*, *D'*	deux droites,
	A, B, C	trois points pris dans cet ordre sur *D*,
	B'	un point
et	A', C'	deux points de *D'* tels que (AB') // (BC') et (A'B) // (B'C).

Donné : B' est sur *D'* *si, et seulement si,* (AA') et (CC') sont parallèles.

2. Une A-parallélienne

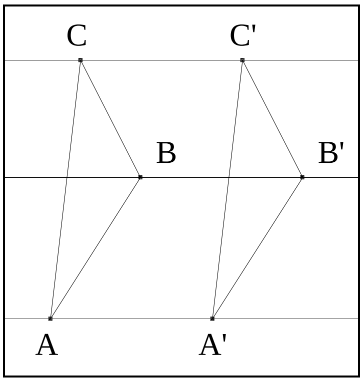


Finition :	ABC	un triangle,
	P	une droite parallèle à (BC).

Définition : *P* est "une A-parallélienne de ABC".

3. Le petit théorème de Desargues

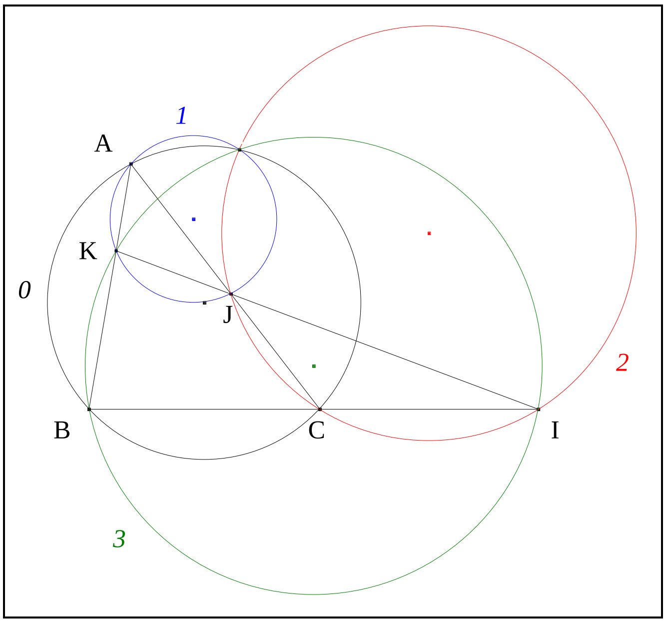
[30] Pappus, *Collections* Livre VII.



Traits :	ABC	un triangle,		
et	A'B'C'	un triangle tel que	**(1)**	(AA') soit strictement parallèle à (BB')
			(2)	(AB) soit parallèle à (A'B')
			(3)	(BC) soit parallèle à (B'C')

Donné : (CC') est parallèle à (BB') *si, et seulement si,* (AC) est parallèle à (A'C').

4. Le point de Miquel-Wallace[31]

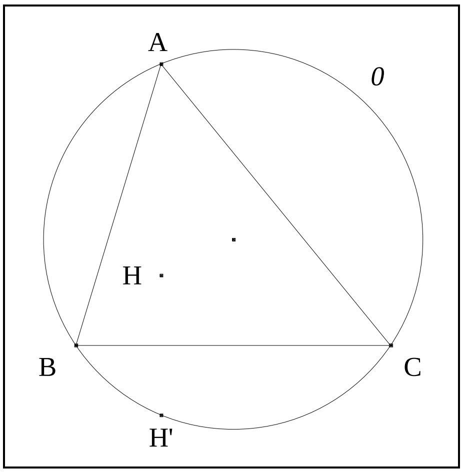


Traits : ABC		un triangle,
	I, J, K	trois points situés resp. sur (BC), (CA), (AB),
	0	le cercle circonscrit à ABC,
et	*1, 2, 3*	les cercles circonscrits resp. aux triangles AKJ, BIK, CJI.

Donné : *si,* I, J et K sont alignés *alors,* *0, 1, 2* et *3* sont concourants.

5. Symétrique de l'orthocentre par rapport à un côté[32]

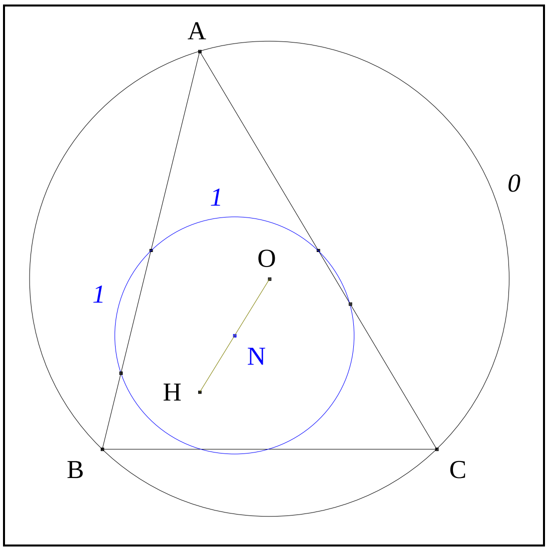
[31] Wallace W., Leybourn's *Mathematical Repository*, vol. 1, part I (1804) 170.
[32] Carnot, n° 142, *De la correlation des figures géométriques*, (1801) 101.



Traits : ABC un triangle acutangle,
H l'orthocentre du triangle,
0 le cercle circonscrit à ABC
et H' la circumtrace de la A-hauteur de ABC.

Donné : H' est le symétrique de H par rapport à (BC).

6. Le centre du cercle d'Euler[33]



Traits : ABC un triangle,
H l'orthocentre de ABC,
0 le cercle circonscrit à ABC,
O le centre de *0*,
1 le cercle d'Euler de ABC
et N le centre de *1*.

Donné : N est le milieu de [OH] et le diamètre de *1* est égal au rayon de *0*.

[33] Feuerbach K...