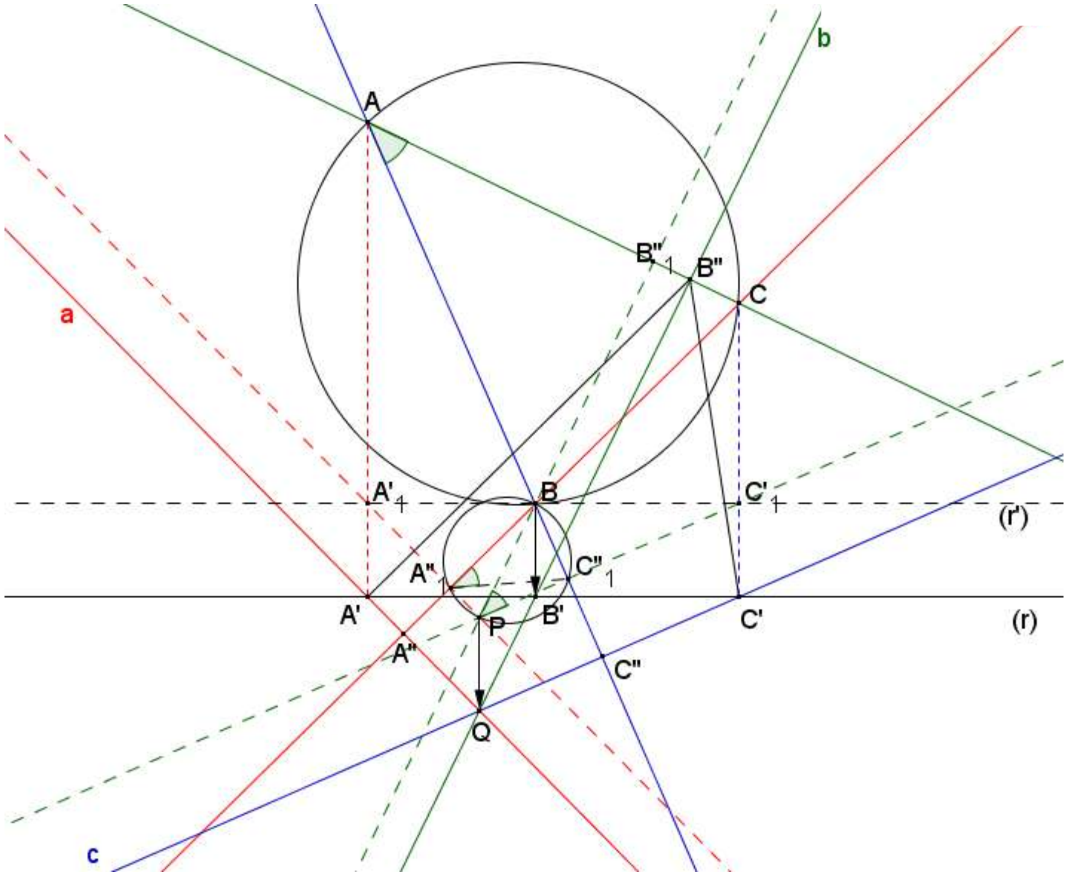
Problema n° 835
Ejercicio 4.
Un punto de concurso curioso.
Sean A' B' C' las proyecciones ortogonales de los vértices del triángulo ABC sobre una recta r.
Sea a la recta que contiene a A' y es perpendicular a BC
Sea b la recta que contiene a B' y es perpendicular a CA
Sea c la recta que contiene a C' y es perpendicular a AB.
Demostrar que a, b y c son concurrentes.
Sortais, Y, y R. (2000): Géométrie de l'espace et du plan. Hermann (pag 129)

Solution proposée par Philippe Fondanaiche



On désigne par A",B" et C" les points d'intersection des droites (BC),(CA) et (AB) avec les droites (a),(b) et (c)..
Soit (r') la droite parallèle à la droite (r) passant par B.Les droites (AA') et (CC') coupent (r') aux points A'_1 et C'_1 qui se projettent sur les droites (BC) et (AB) aux points A''_1 et C''_1 tandis que B se projette en B''_1 sur CA.

Lemme : les droites $A'_1A''_1$,BB''_1 et $C'_1C''_1$ se coupent en un point P.
Démonstration: $BA''_1/BA'_1 = BC'_1/BC$ et $BC''_1/BC'_1 = BA'_1/BA$.
D'où $BA''_1/ BC''_1 = BA/BC$.Les triangles $BA''_1C''_1$ et BAC sont donc semblables, ce qui entraine: $\angle BA''_1C''_1 = \angle BAC$.
Comme les quatre points B,A''_1,P et C''_1 sont cocycliques, on a la relation d'angles: $\angle BA''_1C''_1 = \angle BPC''_1$.
Il en résulte que $\angle BAC = \angle BPC''_1$ et $\angle PBC''_1 = \angle ABB''_1$.
Les trois points P,B et B''_1 sont alignés. Cqfd.

La translation de vecteur **BB'** appliqué au point P donne le point Q à l'intersection des droites (a),(b) et (c) elles-mêmes obtenues à partir des droites ($A'A''_1$),(BB''_1) et ($C'C''_1$) selon le même vecteur de translation.