Problema 836.
33. Propuesto por Viktors Linis, University of Ottawa.
Sobre los lados CA y CB de un triángulo rectángulo isósceles ABC, se toman los puntos D y E tales que |CD|=|CE|. Las perpendiculares desde D y C a AE intersecan la hipotenusa AB en K y L respectivamente. Demostrar que |KL|=|LB|.
Añadido por el director
a) Determinar D para que |CD|=|CE|=|KL|=|LB|
b) Determinar D para que |AK|=|KL|=|LB|
Eureka (1975), Junio, Nº. 4 (pag. 23)

Solución del director

Tomemos ejes coordenados en C(0,0), A(0,1), B(1,0).
Supongamos sin pérdida de generalidad que D(0,t). Es E(t,0).
Así, la recta AE es $\frac{y-1}{0-1}=\frac{x-0}{t-0} \to y=-\frac{x}{t}+1$
Por ello la recta perpendicular a AE por el punto D(0,t) es:

$$y-t=tx.$$

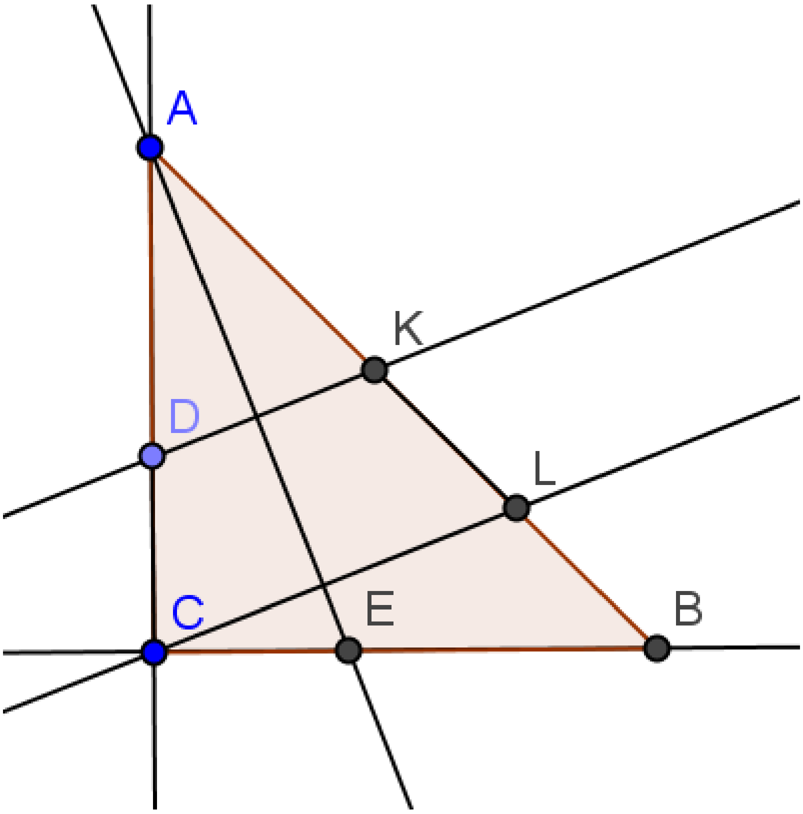
La intersección de la misma con AB, y=-x+1 es

$$K\left(\frac{1-t}{1+t}, \frac{2t}{1+t}\right)$$

Y la recta perpendicular a AE por C(0,0) es y=tx.
Esta recta corta a AB en $L(\frac{1}{1+t}, \frac{t}{1+t})$
Tenemos que los vectores KL y LB tienen de componentes $\left(\frac{-t}{1+t}, \frac{t}{1+t}\right) por\ lo\ que$
c.q.d., $|KL|=|LB|=\frac{t}{1+t}\sqrt{2}$

a) En el caso pedido dado que |CD|=t, habrá de ser:

$$t=\frac{t}{1+t}\sqrt{2}, de\ donde\ t=\sqrt{2}-1$$



b) En el caso de que queramos que |AK|=|KL|, habrá de ser:
AD=DC, con lo que D(0,1/2)

Ricardo Barroso Campos.
Jubilado,
Sevilla, España