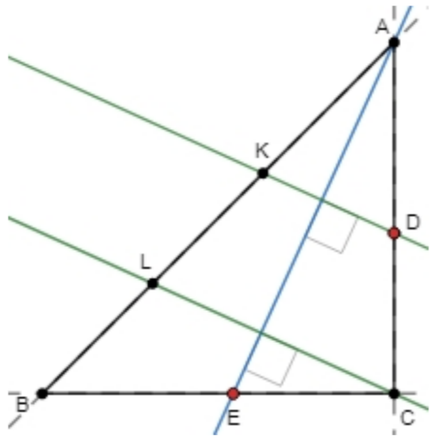
Problema 836. (propuesto por Viktors Linis y Ricardo Barroso Campos) Dado un triángulo ABC isósceles y rectángulo en C, sobre las rectas CA y CB, se consideran puntos D y E (distintos de C), respectivamente, tales que $CD = CE$. Las rectas perpendiculares a AE pasando por D y E intersecan a la hipotenusa AB en los puntos K y L, respectivamente, tal como se muestra en la siguiente figura:



① Demostrar que $KL = LB$.

② Determinar el punto D para que $CD = CE = KL = LB$.

③ Determinar el punto D para que $AK = KL = LB$.

<u>*Solución:*</u>

① Por razones de proporcionalidad, podemos suponer que los catetos del triángulo ABC tienen longitud unidad, por lo que:

$$\left\{\begin{array}{l} a=b=1 \\ c=\sqrt{2} \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} S_A=S_B=1 \\ S_C=0 \end{array}\right.$$

Además, considerando coordenadas baricéntricas con respecto al triángulo ABC, si:

$$\left\{\begin{array}{l} D=(t:0:1-t) \\ E=(0:t:1-t) \end{array}\right. \quad (t\in\mathbb{R}^*)$$

como:

$$AE \equiv (1-t)y+tz=0$$

entonces:

$$\left\{\begin{array}{l} DK \equiv 0=(1-t)x-2ty-tz \\ CL \equiv 0=x-ty \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} K=(2t:1-t:0) \\ L=(t:1:0) \end{array}\right.$$

por lo que:

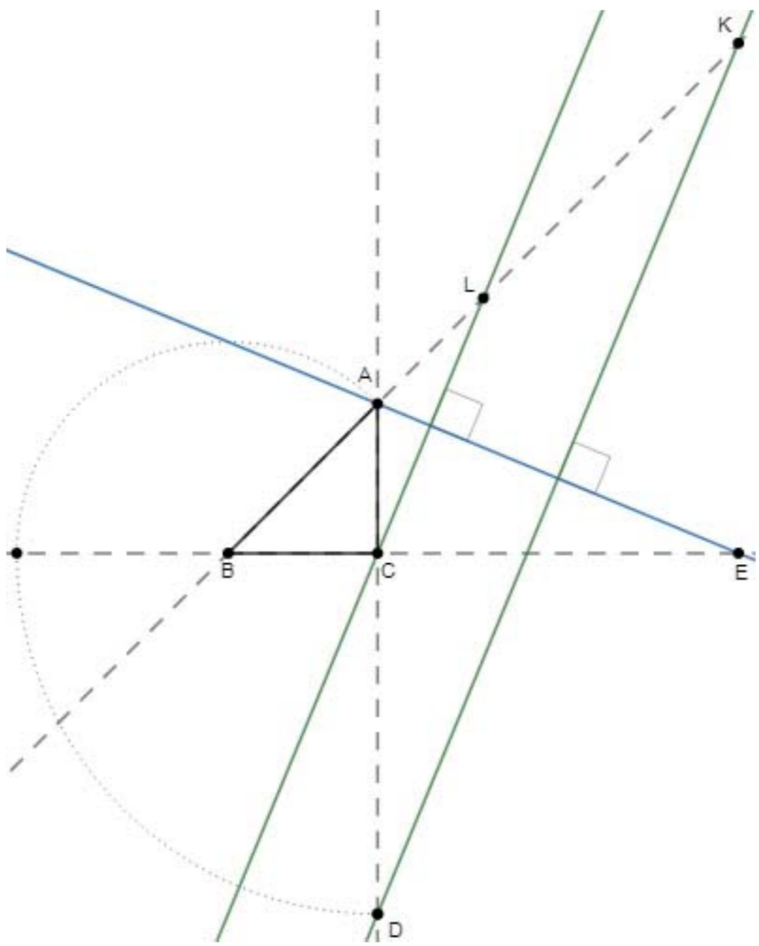
$$KL^2 = \frac{2t^2}{(1+t)^2} = LB^2 \Rightarrow KL = LB$$

② Como $CD^2 = t^2$, entonces:

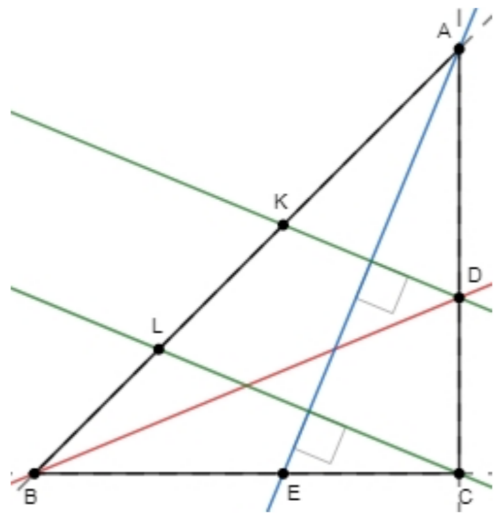
$$KL = CD \Leftrightarrow \frac{2t^2}{(1+t)^2} = KL^2 = CD^2 = t^2 \Leftrightarrow \frac{t^2(t^2+2t-1)}{(1+t)^2} = 0 \underset{t\neq 0}{\Leftrightarrow} t = -1 \pm \sqrt{2}$$

y vamos a distinguir dos casos:

☺ Si $t = -1-\sqrt{2}$, entonces, $D = (-1-\sqrt{2} : 0 : 2+\sqrt{2})$, estando este punto situado en la prolongación del segmento AC a una distancia $1+\sqrt{2} = a+c$ del punto C.



☹ Si $t = -1 + \sqrt{2}$, entonces, $D = (\sqrt{2} - 1 : 0 : 2 - \sqrt{2}) = (1 : 0 : \sqrt{2})$, siendo este punto el pie de la bisectriz correspondiente al vértice B del triángulo ABC.



③ Como $AK^2 = \dfrac{2(1-t)^2}{(1+t)^2}$, entonces:

$$KL = AK \Leftrightarrow \frac{2t^2}{(1+t)^2} = KL^2 = AK^2 = \frac{2(1-t)^2}{(1+t)^2} \Leftrightarrow \frac{2(2t-1)}{(1+t)^2} = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}$$

por lo que $D = (1 : 0 : 1)$ es el punto medio del segmento BC.