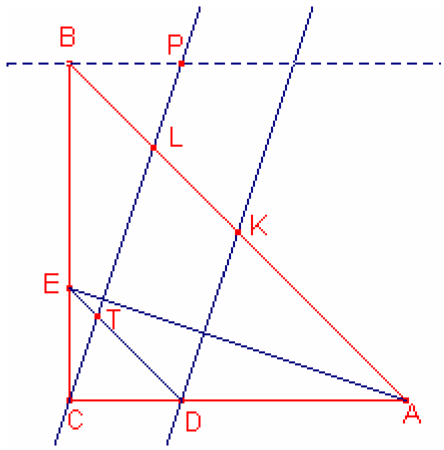
Problema 836

Sobre els costats $\overline{CA}$ i $\overline{CB}$ d'un triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{ABC}$ s'agafen els punts D i E tals que $\overline{CD} = \overline{CE}$. Les perpendiculars des de D i C a $\overline{AE}$ tallen la hipotenusa $\overline{AB}$ en K i L, respectivament. Demostreu que $\overline{KL} = \overline{LB}$.

a) Determineu D a fi que $\overline{CD} = \overline{CE} = \overline{KL} = \overline{LB}$.

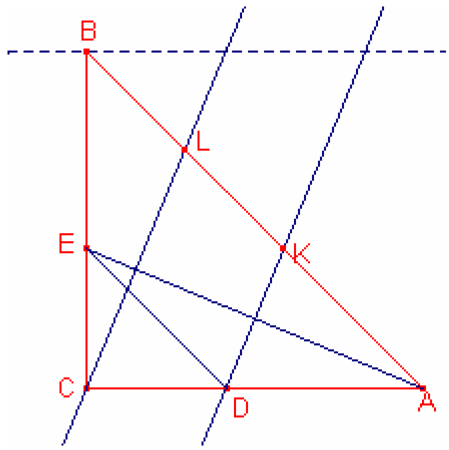
b) Determineu D a fi que $\overline{AK} = \overline{KL} = \overline{LB}$.

Solució:




Siga T la intersecció de $\overline{CL}$ i $\overline{DE}$.
Les rectes CL i DK són paral·leles.
$\overline{AB}$, $\overline{DE}$ són paral·lels.
Aleshores, DKLT és un paral·lelogram. Aleshores:
$\overline{LK} = \overline{DT}$.

Considerem la recta r perpendicular al catet $\overline{CB}$ pel punt B.
La recta r i la recta CL és tallen en el punt P.
$\angle CAE = \angle BCP$, $\angle ECA = \angle PBC = 90º$, $\overline{CA} = \overline{CB}$, aleshores:
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ACE}$, $\overset{\Delta}{CBP}$ són iguals.
Aleshores, $\overline{CE} = \overline{BP}$.
$\angle CDT = \angle PBL = 45º$, $\angle TCD = \angle LPB$. Aleshores:
Els triangles $\overset{\Delta}{CDT}$, $\overset{\Delta}{PBL}$ són iguals.
Aleshores, $\overline{DT} = \overline{LB}$.
Per tant, $\overline{KL} = \overline{LB}$.




a)
Si $\overline{CE} = \overline{CD} = \overline{LB} = \overline{KL}$, aleshores,
$\overline{CA} = \overline{LA}$, aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{CAL}$ és isòsceles.
Per tant, $\overline{AE}$ és bisectriu de l'angle A.
Aleshores, $\overline{BD}$ és bisectriu de l'angle B.

b)
Si $\overline{AK} = \overline{KL} = \overline{LB}$, les rectes CL i DK són paral·leles, aleshores:
$\overline{CD} = \overline{AD}$. Aleshores, D és el punt mig del catet $\overline{CA}$.