Problema 836

Sobre los lados $\overline{CA}$ y $\overline{CB}$ d'un triángulo rectángulo isósceles $\overset{\Delta}{ABC}$ se toman los puntos D y E tales que $\overline{CD}=\overline{CE}$. Las perpendiculares desde D y C a $\overline{AE}$ intersectan la hipotenusa $\overline{AB}$ en K y L, respectivamente. Demostrar que $\overline{KL}=\overline{LB}$.

a) Determinar D tal que $\overline{CD}=\overline{CE}=\overline{KL}=\overline{LB}$.

b) Determinar D tal que $\overline{AK}=\overline{KL}=\overline{LB}$.

Solución:

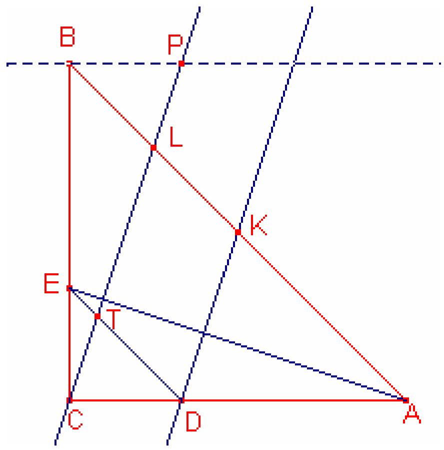
Sea T la intersección de $\overline{CL}$ y $\overline{DE}$.

Les rectas CL y DK son paralelas.

$\overline{AB}$, $\overline{DE}$ son paralelos.

Entonces, DKLT es un paralelogramo. Entonces:

$\overline{LK}=\overline{DT}$.



Consideremos la recta r perpendicular al cateto $\overline{CB}$ por el punto B.

La recta r y la recta CL es cortan en el punto P.

$\angle CAE=\angle BCP$, $\angle ECA=\angle PBC=90^{o}$, $\overline{CA}=\overline{CB}$, entonces:

Los triángulos rectángulos $\overset{\Delta}{ACE}$, $\overset{\Delta}{CBP}$ son iguales.

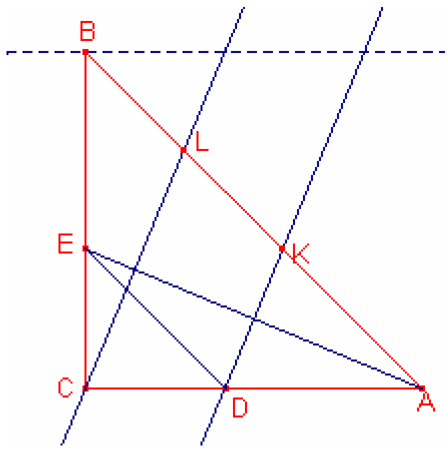
Entonces, $\overline{CE}=\overline{BP}$.

$\angle CDT=\angle PBL=45^{o}$, $\angle TCD=\angle LPB$. Entonces:

Los triángulos $\overset{\Delta}{CDT}$, $\overset{\Delta}{PBL}$ son iguales.

Entonces, $\overline{DT}=\overline{LB}$.

Por tanto, $\overline{KL}=\overline{LB}$.



a)

Si $\overline{CE}=\overline{CD}=\overline{LB}=\overline{KL}$, entonces,

$\overline{CA}=\overline{LA}$, entonces, el triángulo $\overset{\Delta}{CAL}$ es isósceles.

Por tanto, $\overline{AE}$ es bisectriz del ángulo A.

Entonces, $\overline{BD}$ es bisectriz del ángulo B.

b)

Si $\overline{AK}=\overline{KL}=\overline{LB}$, las rectas CL y DK son paralelas, entonces:

$\overline{CD}=\overline{AD}$. Entonces, D es el punto medio del cateto $\overline{CA}$.