Problema 836.

33. Propuesto por Viktors Linis, University of Ottawa.

Sobre los lados CA y CB de un triángulo rectángulo isósceles ABC, se toman los puntos D y E tales que |CD|=|CE|. Las perpendiculares desde D y C a AE intersecan la hipotenusa AB en K y L respectivamente. Demostrar que |KL|=|LB|.

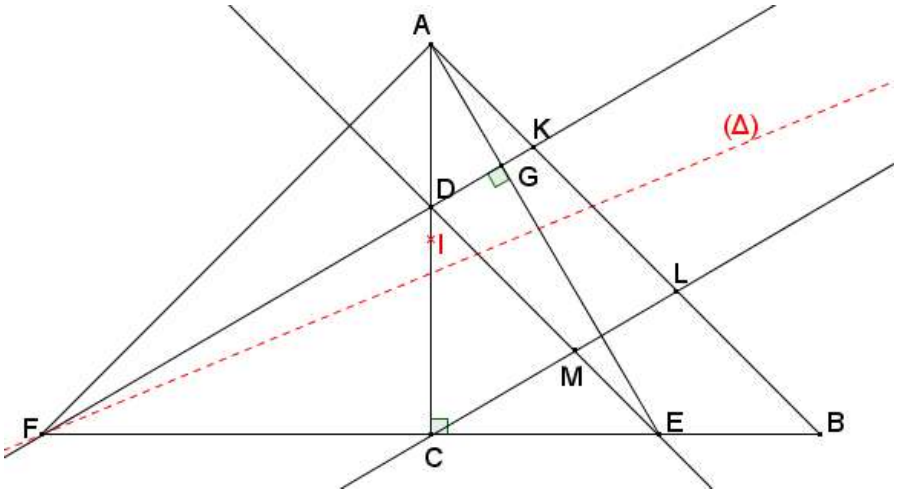
Añadido por el director.

a) Determinar D para que |CD|=|CE|=|KL|=|LB|

b) Determinar D para que |AK|=|KL|=|LB|

Eureka (1975), Junio, Nº. 4 (pag. 23)

Solution proposée par Philippe Fondanaiche



On désigne par :

- F le point d'intersection des droites (BC) et (DK),
- G le point d'intersection des droites (DK) et (AE),
- M le point d'intersection des droites (CL) et (DE).

Comme les quatre points C,D,G et E sont cocycliques, on a les relations d'angles : $\angle$CDF = $\angle$ADK = 180° – $\angle$CDG = $\angle$CEA. Par ailleurs CD = CE.

Les triangles rectangles CDF et CEA sont donc isométriques. D'où CF = CA = CB et le point C est le milieu du segment BF. Comme les droites (CL) et (FK) qui ont la droite (AE) comme perpendiculaire commune, sont parallèles entre elles, la droite (CL) partage le segment BK en son milieu.Cqfd.

a) Le quadrilatère DKLM est un parallélogramme. Les distances KL,LB,CD et CE sont égales si et seulement CDM est un triangle isocèle de sommet D. Il en est de même du triangle CAL,isocèle de sommet A. La droite (DF) est alors la bissectrice (Δ) de l'angle $\angle$CFA de 45°.

b) Le point D tel que les distances AK,KL et LB sont égales est confondu avec le milieu I du côté CA. En effet d'après le théorème de Thalès, on a AK/KL = AI/IC = 1.

D'où KL = LB = AK.