Problemas n° 837 y 838
Propuesto por Julián Santamaría Tobar

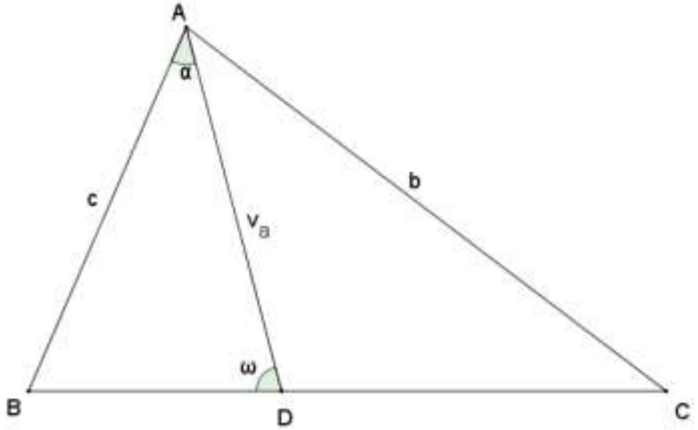
Problema 837

Construir el triángulo cuyos datos son el valor del ángulo A, la longitud de la bisectriz interior va, (b+c)
Santamaría, J. (2017):Comunicación personal.

Problema 838

Construir el triángulo cuyos datos son el valor del ángulo A, la longitud de la bisectriz interior va, (b-c)
Santamaría, J. (2017):Comunicación personal.

Solution proposée par Philippe Fondanaiche



On désigne par : $\alpha = \angle BAD = \angle CAD$, $b = AC$, $c = AB$, $v_a = AD$ et $\omega = \angle BDA$.
On pose $\tan(\omega) = u$.
D'après la loi des sinus dans les triangles ABD et ACD, on a respectivement les deux relations:
$c/\sin(\omega) = v_a/\sin(\alpha + \omega)$ et $b/\sin(\omega) = v_a/\sin(\omega - \alpha)$.
On en déduit $c(\sin(\alpha) + \cos(\alpha).u) = v_a.u$ puis $b(\cos(\alpha).u - \sin(\alpha)) = v_a.u$
D'où $u = c.\sin(\alpha)/(v_a - c.\cos(\alpha))$ et $u = b.\sin(\alpha)/(b.\cos(\alpha) - v_a)$
Il en résulte l'équation $[E] = c/(v_a - c.\cos(\alpha)) = b/(b.\cos(\alpha) - v_a)$.

Problema 837

On désigne par $s = b + c$.
De [E], on déduit la relation $2b.c.\cos(\alpha) = v_a.(b + c) = v_a.s$
Les côtés AC = b et AB = c sont donc solutions de l'équation du second degré en X, $X^2 - sX + p = 0$ dans laquelle on connaît la somme $s = b + c$ et le produit $p = bc = v_a.s/2\cos(\alpha)$ des racines.
Cette équation a des racines réelles si et seulement si $s > 2v_a/\cos(\alpha)$.
Le triangle ABC est donc constructible à la règle et au compas.

Problema 838

On désigne par $d = b - c$.
De [E], on déduit la relation $b = v_a.c/(2c.\cos(\alpha) - v_a)$
D'où $b - c = v_a.c/(2c.\cos(\alpha) - v_a) - c = d$. Le côté AB = c est alors solution de l'équation du second degré :$2\cos(\alpha)X^2 - 2(v_a - d.\cos(\alpha))X - v_a.d = 0$.
Le discriminant $v_a^2 + d^2.\cos^2(\alpha)$ étant toujours positif, cette équation a toujours des racines réelles.
Comme précédemment, le triangle ABC est donc constructible à la règle et au compas.