''PAYSAGE OUVERT''

OR

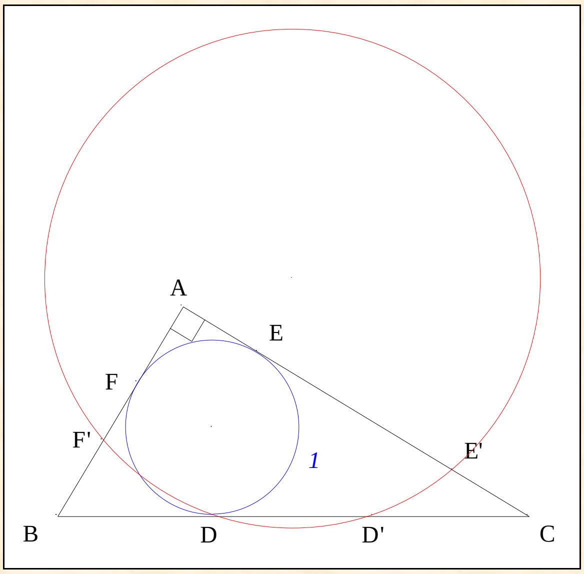
''AN OPEN LANDSCAPE''

UN RÉSULTAT REMARQUABLE

DE

STAN FULGER

Jean - Louis AYME [1]



Résumé. Ce "Paysage ouvert" concerne un résultat remarquable de 2017 du roumain Stan Fulger que l'auteur a lié avec celui du vietnamien Đào Trường Giang datant de 2007.
Cette situation peut aussi s'envisager comme un supplément de "Cercle inscrit dans un triangle rectangle" [2].
Les figures sont toutes en position générale et tous les théorèmes cités peuvent tous être démontrés synthétiquement.

Abstract. This "open landscape" concern a remarkable result of 2017 of the Romanian Stan Fulger that author has linked with that of the Vietnamese Đào Trường Giang 2007.
This situation can also be considered as a supplement to "Cercle inscrit dans un triangle rectangle" [3].
The figures are all in general position and all cited theorems can all be proved synthetically.

---

1 St-Denis, Île de la Réunion (Océan Indien, France), le 30/07/2017 ; jeanlouisayme@yahoo.fr
2 Ayme J.-L., Cercle inscrit dans un triangle rectangle, G.G.G. vol. **6** ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/
3 Ayme J.-L., Cercle inscrit dans un triangle rectangle, G.G.G. vol. **6** ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/

Sommaire

A. INCIRCLE DE *MATHSCOPE*

proposed

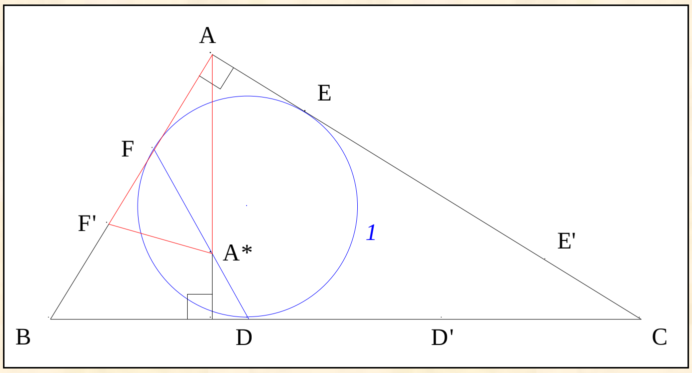
by

Đào Trường Giang (Viet Nâm)

1. Le problème

VISION

Figure :

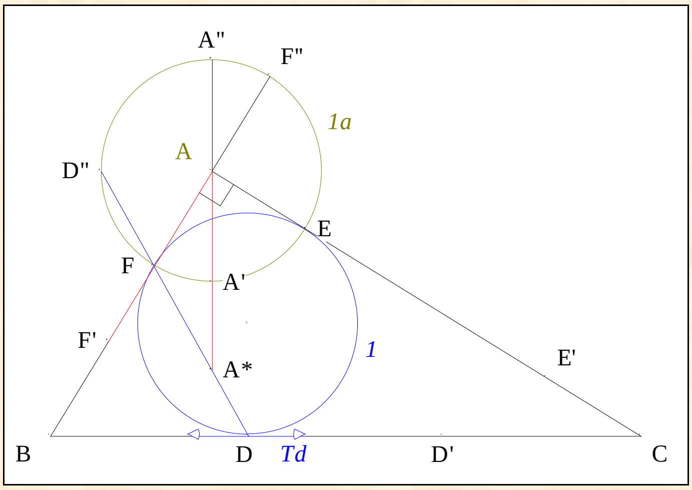


Traits : ABC un triangle A-rectangle,
1 le cercle inscrit de ABC,
DEF le triangle de contact de ABC,
D'E'F' le triangle de Nagel de ABC
et A* le point d'intersection de A-hauteur de ABC avec (DF).

Donné : le triangle AA*F' est A-isocèle. [4]

VISUALISATION

[4] Đào Trường Giang, Problem **209.3**, *Mathscope* (2007) 3 ; http://imomath.com/pcpdf/f1/f40.pdf
Problema **839**, *laboratorio virtual triangulos cabri*, EXTRA de verano de 2017 Del 1 de Julio al 31 de Agosto ; http://personal.us.es/rbarroso/trianguloscabri/

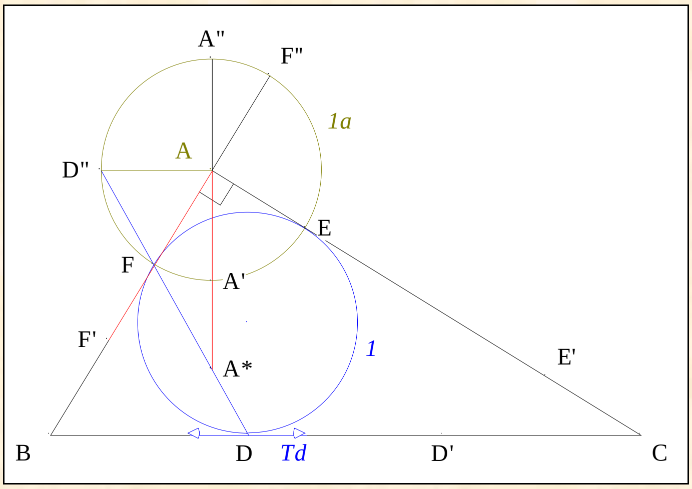


- Notons *1a* le cercle de centre A passant par E ; il passe par F ;
  A', A" les points d'intersection de *1a* avec (AA*) comme indiqués sur la figure,
  D", F" les seconds points d'intersection de *1a* resp. avec (DF), (AB)
  et *Td* la tangente à *1* en D.

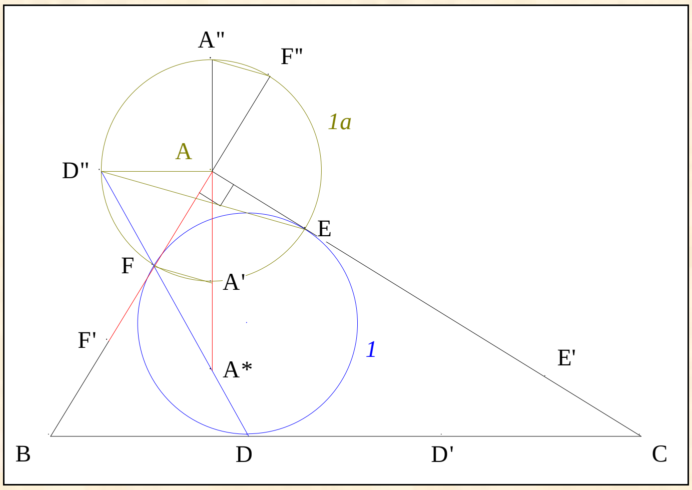
- **Scolies :** **(1)** *1a* a pour rayon celui de *1*

  (2) *Td* = (BDC)

  (3) *1* et *1a* sont orthogonaux.

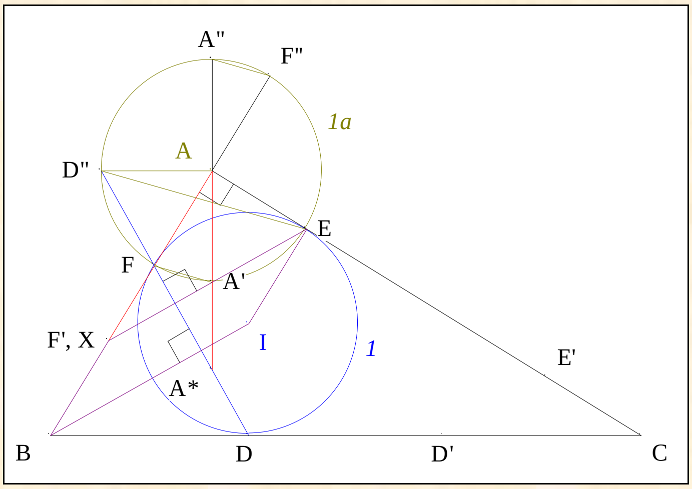


- D'après "Deux cercles orthogonaux (Cf. **C.** Annexe **1**), (D"A) // *Td*.



- Sachant que deux angles au centre et égaux sous tendent des cordes égales, A'D" = EF ;
  le quadrilatère cyclique et convexe D"FA'EQ est un trapèze ;
  en conséquence, (A'F) // (ED").

- **Scolie :** (A'F), (A"F") et (ED") sont parallèles entre elles.

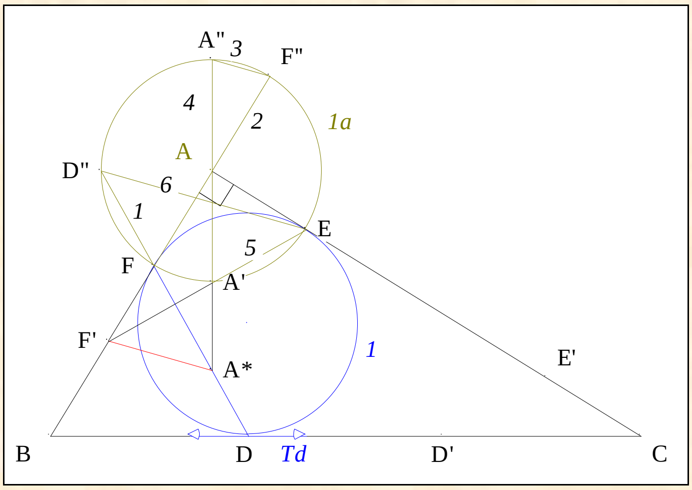


- Notons I le centre de *1*
  et X le point d'intersection de (A'E) et (AB).

- **Scolie :** (AB) // (IE).

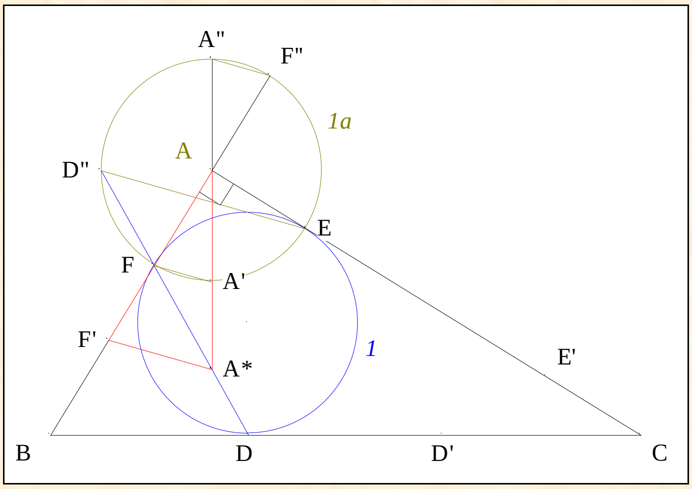
- Par une chasse angulaire, nous montrerions que (EX) ⊥ (DFD") ;
  par culture géométrique, (DFD") ⊥ (BI) ;
  d'après l'axiome **IVa** des perpendiculaires, (EX) // (BI).

- Le quadrilatère BIEX étant un parallélogramme, BX = IE (= AF) ;
  en conséquence, X et F' sont confondus.



- D'après "L'équivalence d'Aubert" (Cf. **C.** Annexe **2**), appliqué à l'hexagone cyclique D"FF"A"A'ED", **(1)** (A*F') en est la pascale

  (2) (A*F') // (ED").



- **Scolie :** (A*F') // (A'F).

- **Conclusion :** le triangle AA'F étant A-isocèle, AA*F' est A-isocèle.

2. Archive

209.3 (Đào Trường Giang) Given a right triangle with hypotenuse BC, the incircle of the triangle is tangent to the sides AB amd BC respectively at P, and Q. A line through the incenter and the midpoint F of AC intersects side AB at E; the line through P and Q meets the altitude AH at M. Prove that $AM - AE$.

THE MATHSCOPE

All the best from
Vietnamese Problem Solving Journals

February 12, 2007

please download for free at our website:

www.imo.org.yu

translated by Phạm Văn Thuận, Eckard Specht

Vol I, Problems in Mathematics Journal for the Youth

The Mathscope is a free problem resource selected from mathematical problem solving journals in Vietnam. This freely accessible collection is our effort to introduce elementary mathematics problems to foreign friends for either recreational or professional use. We would like to give you a new taste of Vietnamese mathematical culture. Whatever the purpose, we welcome suggestions and comments from you all. More communications can be addressed to Phạm Văn Thuận of Hanoi University, at pvthuan@gmail.com

It's now not too hard to find problems and solutions on the Internet due to the increasing number of websites devoted to mathematical problem solving. It is our hope that this collection saves you considerable time searching the problems you really want. We intend to give an outline of solutions to the problems in the future. Now enjoy these "cakes" from Vietnam first.

Pham Van Thuan

[5]

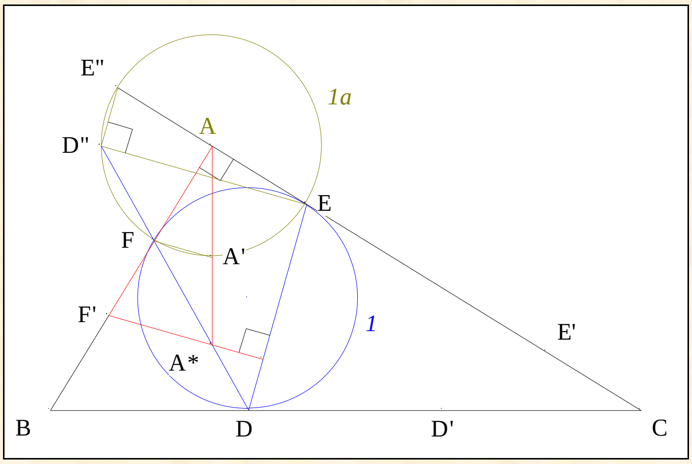
3. Note historique : ce problème de *Mathscope* que l'auteur a légèrement modifié [6], a été proposé par "Apollo" [7] le 20 mai 2008 sur le site *Mathlinks*.
Les solutions qui ont été proposées sont de nature algébrique ("Mathangel"), trigonométrique (Giorgieri Gabriel et Vigil Nicula), projective (Kostas Vittas) et métrique (Virgil Nicula).
Rappelons encore une fois la réflexion de "Mathangel" [8]:

I use an ugly method to prove it (algebraic method).
Just wonder if there is a beautiful method (pure geometry).

4. Un résultat annexe

---

5 *Mathscope* 2007 ; http://imomath.com/pcpdf/f1/f40.pdf
6 Ayme J.-L., Cercle inscrit dans un triangle rectangle, G.G.G. vol. **6** ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/
7 "Apollo", Incircle, AoPS du 20/05/2008 ; http://www.mathlinks.ro/Forum/viewtopic.php?search_id=235828910&t=205814.
8 Emmanuel Lawrence ; Lawrence is my name, Gabriel and my surname is Giorgieri



- Notons E" le second point d'intersection de (AE) avec *1a*.

- Les cercles *1* et *1a*, les points de base F et E, ls moniennes (DFD") et (EEE"),
  conduisent au théorème **3** de Reim ; il s'en suit que (DE) // (D"E").

- D'après Thalès "Triangle inscriptible dans un demi-cercle", (D"E") ⊥ (ED") ;
  en conséquence, (DE) ⊥ (ED").

- **Conclusion :** (ED") étant parallèle à (A*F'), (A*F') est perpendiculaire à (DE).

B. CONCYCLIC POINTS

IN

A RIGHT-ANGLED TRIANGLE

proposed

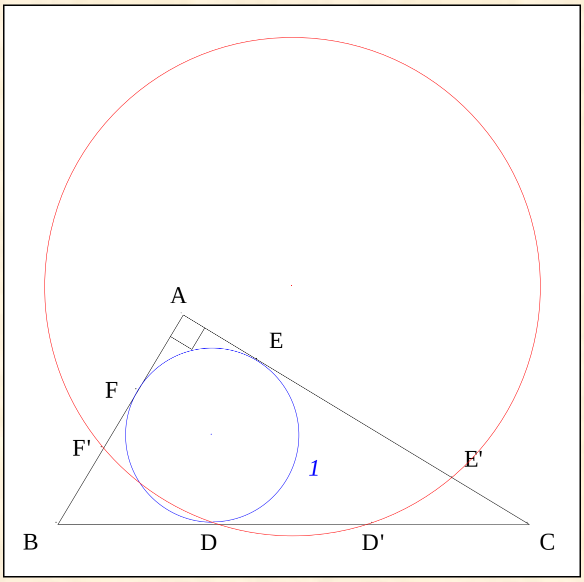
by

Stan Fulger (Roumanie)

1. Le problème

VISION

Figure :

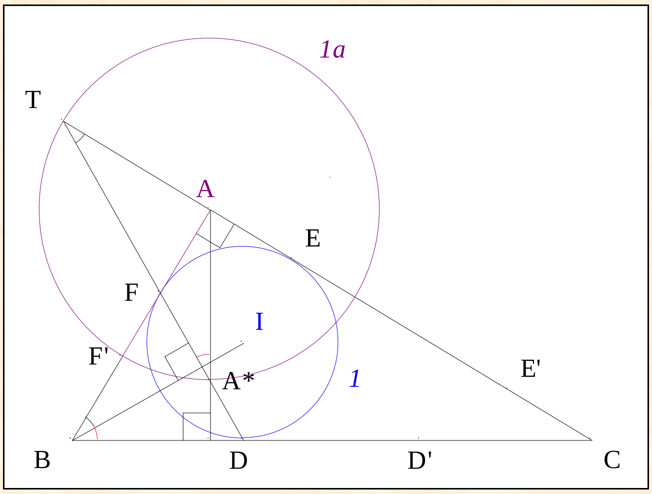


Traits :	ABC	un triangle A-rectangle,
	1	le cercle inscrit à ABC,
	DEF	le triangle de contact (Gergonne) de ABC,
	D'E'F'	le triangle de Nagel de ABC
et	*1'*	le cercle circonscrit à D'E'F'.

Donné : *1'* passe par D. [9]

VISUALISATION

[9] Fulger S., Concyclic points in a right-angled triangle, AoPS du 17/06/2017 ; https://artofproblemsolving.com/community/c6t48f6h1463378_concyclic_points_in_a_rightangled_triangle



- Notons A* le point d'intersection de la A–hauteur de ABC avec (DF)

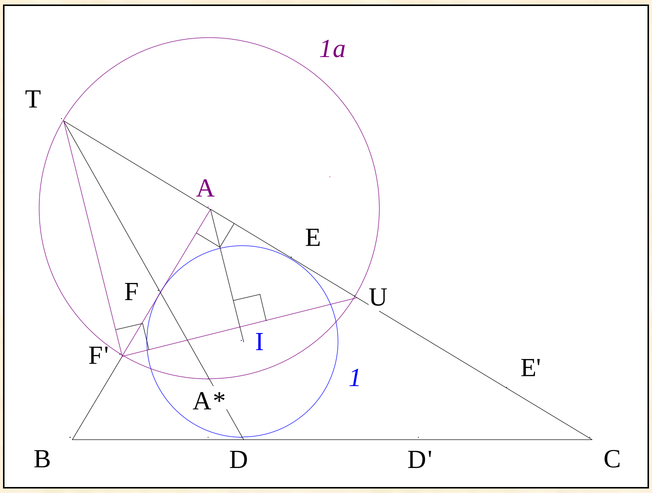
- D'après **A. 1.**, le triangle AA*F' est A-isocèle.

- Notons I le centre de *1*,
  1a le cercle de centre A passant par A* ; il passe par F' ;
  et T le point d'intersection de (DF) et (AC).

- Une chasse angulaire :

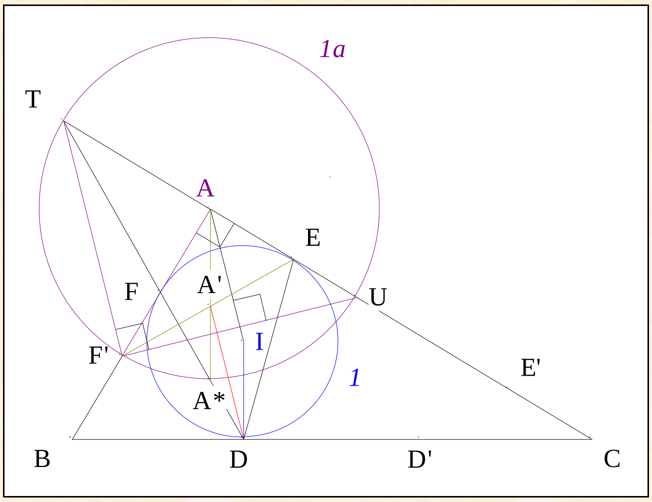
  * par "Angles à côtés perpendiculaires", <A*TA = <IBA
  * (BI) étant la B-bissectrice intérieure de ABC, <IBA = <DBI
  * par "Angles à côtés perpendiculaires", <DBI = <AA*T
  * par transitivité de =, <A*TA = <AA*T.

- **Conclusion partielle :** AA*T étant A-isocèle, *1a* passe par T.



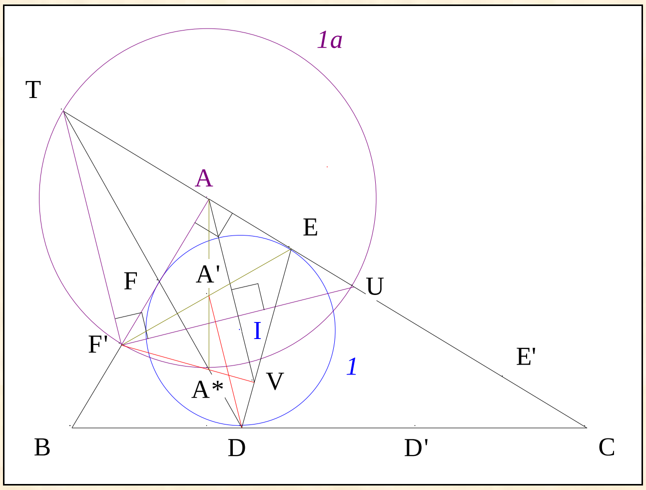
- Notons U le second point d'intersection de (TC) avec *1a*.

- D'après Thalès "Triangle inscriptible dans un demi-cercle", (TF') ⊥ (F'U) ;
  d'après Thalès "Rapports", (F'U) // (FE) ;
  le triangle AF'U étant A-isocèle, (FE) ⊥ (AI) ;
  en conséquence, (TF') // (AI).



- Notons A' le point d'intersection de (AA*) et (EF').

- D'après **A. 1.**, le quadrilatère AA'DI ayant deux côtés opposés parallèles et égaux, est un parallélogramme ; en conséquence, (DA') // (AI).



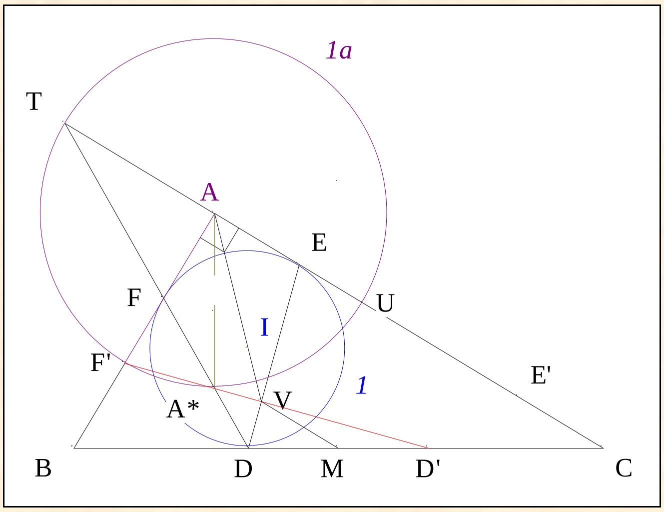
- Notons V le point d'intersection de (AI) et (DE).

- D'après Pappus d'Alexandrie "La proposition **139**" [10]
  (DJ) étant la pappusienne de l'hexagone F'TA*AVEF', F', A* et V sont alignés.

- D'après **A. 4.**, (F'V) ⊥ (DE).

---

[10] Ayme J.-L., Une rêverie de Pappus d'Alexandrie, G.G.G. vol. **6** ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/



- Notons M le milieu de [BC].

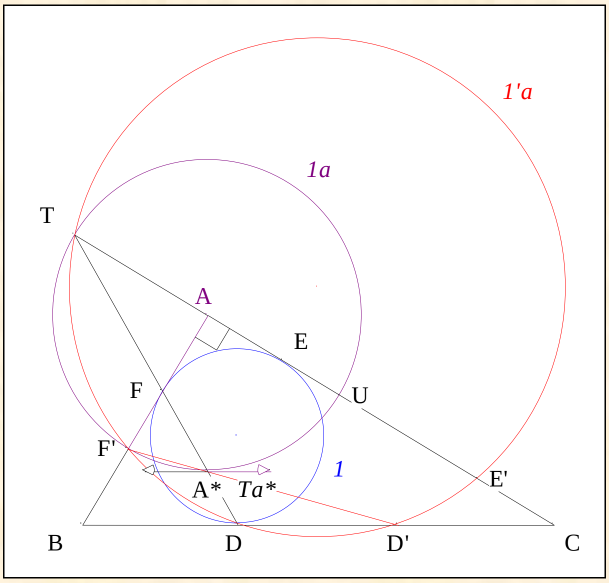
- D' étant l'isotome de D relativement à [BC], M est le milieu de [DD'].

- D'après "An unlikely concurrence" [11], (MV) // (AC).

- Le triangle CDE étant C-isocèle, le triangle MDV est M-isocèle.

- Les segments [MD], [MV], [MD'] étant égaux,
  d'après Thalès "Triangle inscriptible dans un demi-cercle", (D'V) ⊥ (DE).

- Nous savons que (DE) ⊥ (F'V) ;
  d'après l'axiome **IVa** des perpendiculaires, (D'V) // (F'V) ;
  d'après le postulat d'Euclide, (F'V) = (D'V)
  d'après l'axiome d'incidence **Ia**, F', A* et D' sont alignés. [12]



- Notons *Ta** la tangente à *1a* en A*.

- **Scolie :** *Ta** // (BC) i.e. (DD').

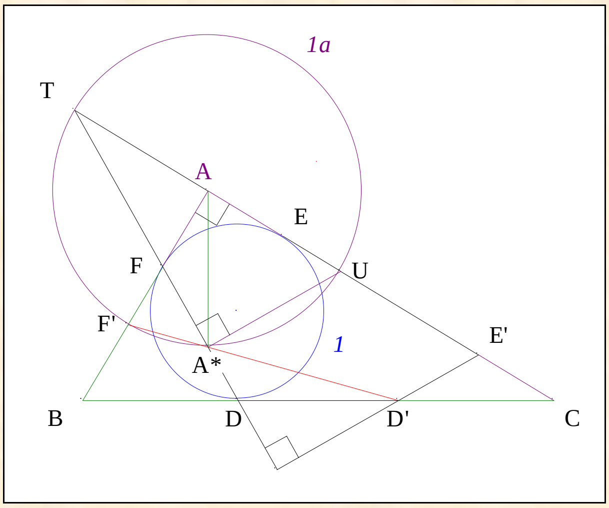
[11] Ayme J.-L., An unlikely concurrence, G.G.G. vol. **4** ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/

[12] Ayme J.-L., Three concurrent lines, AoPS du 18/06/2017 ; https://artofproblemsolving.com/community/c6h1464056_three_concurrent_lines

- Le cercle *1a*, les points de base T et F', les moniennes naissantes (A*TD) et (A*F'D'), les parallèles *Ta** et (DD'), conduisent au théorème **1''** de Reim ;
  en conséquence, T, F', D, D' sont cocycliques.

- Notons *1'a* ce cercle.

Commentaire : il reste à montrer que E' est sur *1'a*.



- Par "Angles à côtés perpendiculaires", <E'CD' = FAA*.

- Une première chasse segmentaire :

  * E' étant l'isotome de E relativement à [AC], E'C = AE
  * d'après Euclide "Deux tangentes égales", AE = AF
  * par transitivité de =, E'C = AF.

- Une seconde chasse segmentaire :

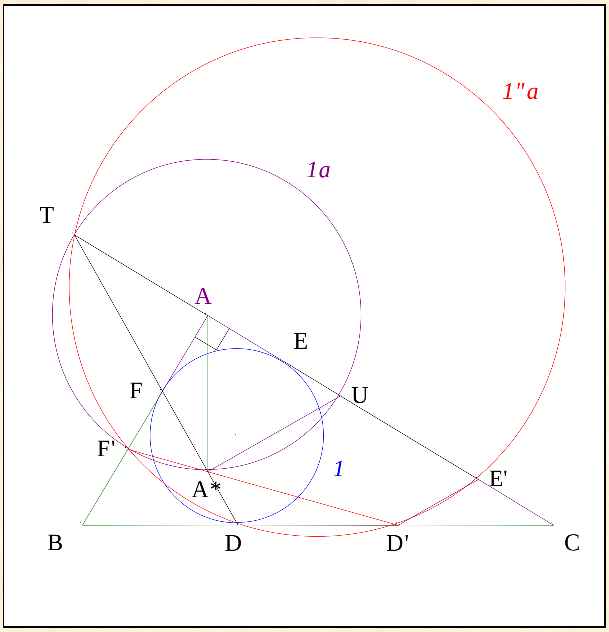
  * D' étant l'isotome de D relativement à [BC], CD' = BD
  * d'après Euclide "Deux tangentes égales", BD = BF
  * F étant l'isotome de F' relativement à [AB], BF = AF'
  * d'après **A. 1.**, AF' = AA*
  * par transitivité de =, CD' = AA*.

- D'après "Le théorème c.a.c.", les triangles CD'E' et AA*F sont égaux.

- CD'E' ayant deux côtés resp. perpendiculaires aux côtés correspondants de AFA*, (D'E') ⊥ (A*F) ;
  d'après Thalès "Triangle inscriptible dans un demi-cercle", (A*F) ⊥ (A*U) [13];
  d'après l'axiome **IVa** des perpendiculaires, (D'E') // (A*U).

---

[13] Ayme J.-L., Two perpendiculars, AoPS du 19/06/2017 ;
https://artofproblemsolving.com/community/c6t48f6h1464472_two_perpendiculars



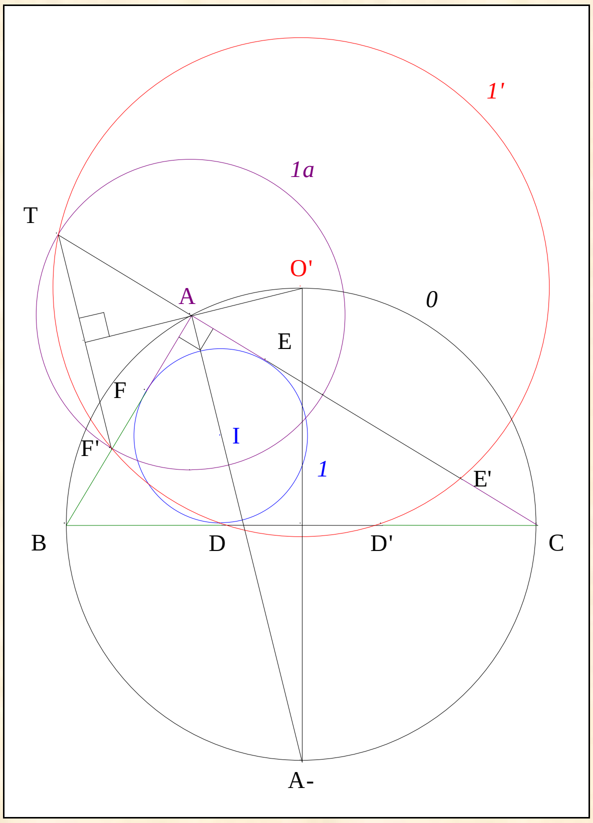
- Le cercle *1a*, les points de base F' et T, les moniennes naissantes (A*F'D') et (UT'E'), les parallèles (A*U) et (D'E'), conduisent au théorème **0''** de Reim ;
  en conséquence, F', T, D', E' sont cocycliques.

- Notons *1''a* ce cercle.

- Les cercles *1''* et *1'a* ayant trois points en commun sont égaux ;
  en conséquence, ce cercle n'est d'autre que le cercle circonscrit à D'E'F' i.e. *1'*.

- **Conclusion :** *1'* passe par D.

2. Un résultat annexe

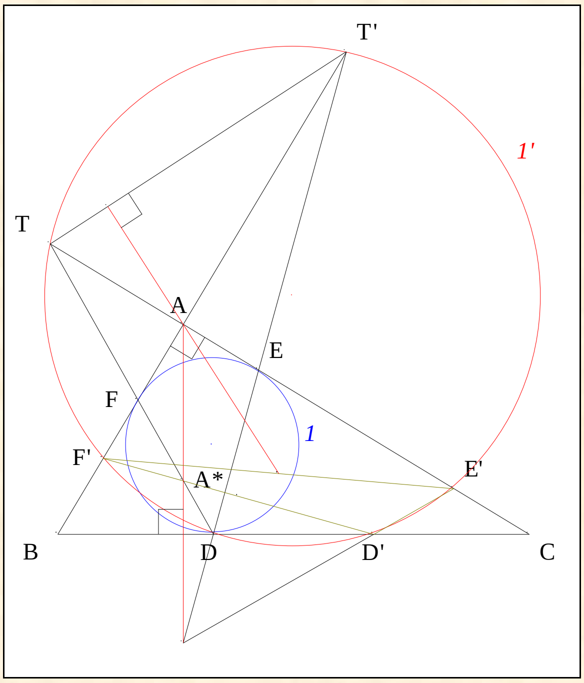


• Notons	*0*	le cercle circonscrit à ABC,
	O'	le centre de *0*
et	A-	le second A-perpoint de ABC.

• **Scolies :**	**(1)**	(AO') est la médiatrice de [F'T]
	(2)	(O'A-) est la médiatrice de [DD'] ou encore de [BC].

- (TF') étant parallèle à (AIA-), (AA-) ⊥ (AO').
- D'après Thalès "Triangle inscriptible dans un demi-cercle", O' est sur *0*.
- **Conclusion :** le centre de *1'* est sur *0*.

3. Ouverture



4. Une très courte biographie de Stan Fulger

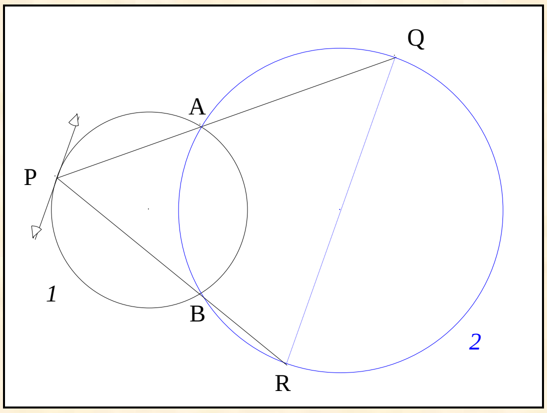

[14]

Stan Fulger is a Master Mariner [15] and geometry is only his hobby.
Actually, he is 63 years old and also a happy father of two girls and one boy, who is a ph. d. in mathematics i.e. doctor in mathematics
Usually he lives in Constanta (Roumania).

[14] Phare de la Mer Noire
[15] capitaine de bateau commercial

C. ANNEXE

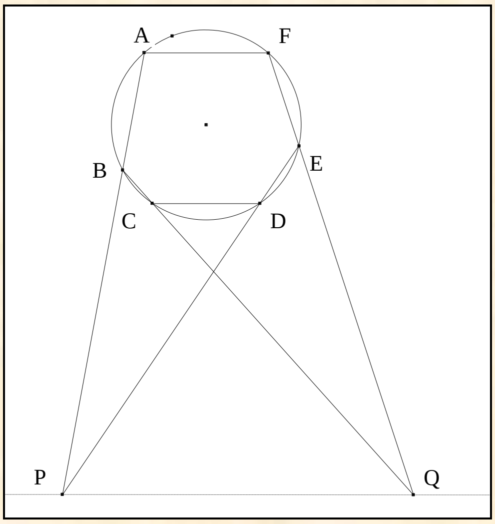
1. Deux cercles orthogonaux [16]



Traits : *1*, *2* deux cercles sécants,
A, B les deux points d'intersection de *1* et *2*,
P un point de *1*,
Tp la tangente à *1* en P
et Q, R les seconds points d'intersection resp. de (PA), (PB) avec *2*.

Donné : *1* et *2* sont orthogonaux
si, et seulement si,
(QR) est une droite diamétrale de *2*, parallèle à *Tp*.

2. L'équivalence d'Aubert [17]



Traits : *1* un cercle,
ABCDE un pentagone inscrit dans *1*,
F un point tel que (AF) soit parallèle à (CD)
et P, Q les points d'intersection resp. de (AB) et (DE), (BC) et (EF).

Donné : F est sur *1* *si, et seulement si,* (PQ) et (AF) sont parallèles.

---

[16] Altshiller-Curt N., Note on the orthocentric tetrahedron, *American Mathematical Monthly* (34) 500-501
[17] La condition nécessaire est de Paul Aubert

D. LEXIQUE

FRANÇAIS - ANGLAIS

A	
aligné	collinear
annexe	annex
axiome	axiom
appendice	appendix
adjoint	associate
a propos	by the way btw
acutangle	acute angle
axiome	axiom
B	
bissectrice	bisector
bande	strip
C	
centre	incenter
centre du cercle circonscrit	circumcenter
cercle circonscrit	circumcircle
cévienne	cevian
colinéaire	collinear
concourance	concurrence
coincide	coincide
confondu	coincident
côté	side
par conséquence	consequently
commentaire	comment
D	
d'après	according to
donc	therefore
droite	line
d'où	hence
distinct de	different from
E	
extérieur	external
F	
figure	figure
H	
hauteur	altitude
hypothèse	hypothesis
I	
intérieur	internal
identique	identical
i.e.	namely
incidence	incidence
L	
lemme	lemma
lisibilité	legibility
M	
mediane	median
médiatrice	perpendicular bissector
milieu	midpoint

N	
Notons	name
nécessaire	necessary
note historique	historic note
O	
orthocentre	orthocenter
ou encore	otherwise
P	
parallèle	parallel
parallèles entre elles	parallel to each other
parallélogramme	parallelogram
pédal	pedal
perpendiculaire	perpendicular
pied	foot
point de vue	point of view
postulat	postulate
point	point
pour tout	for any
Q	
quadrilatère	quadrilateral
R	
remerciements	thanks
reconnaissance	acknowledgement
respectivement	respectively
rapport	ratio
répertorier	to index
S	
semblable	similar
sens	clockwise in this
order	
segment	segment
Sommaire	summary
symédiane	symmedian
suffisante	sufficient
sommet (s)	vertex (vertice)
T	
trapèze	trapezium
tel que	such as
théorème	theorem
triangle	triangle
triangle de contact	contact triangle
triangle rectangle	right-angle triangle