Propuesto por Jean Louis Aymé

Problema 839.

Sea ABC un triángulo rectángulo en A.

1 la circunferencia inscrita de ABC.

DEF el triángulo de contacto (Gergonne) de ABC.

D' E' F' el triángulo de Nagel de ABC.

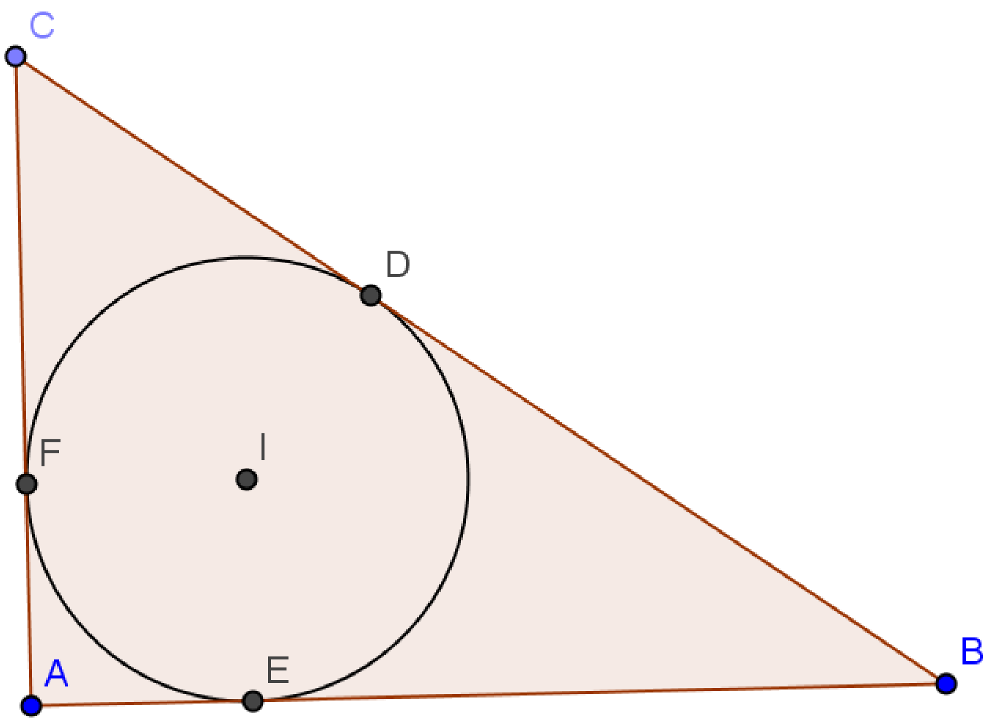
1' la circunferencia circunscrita a D'E'F'.

Probar que *1'* contiene a D.

Fulger, S. (2017): Comunicación personal

Solución del director:

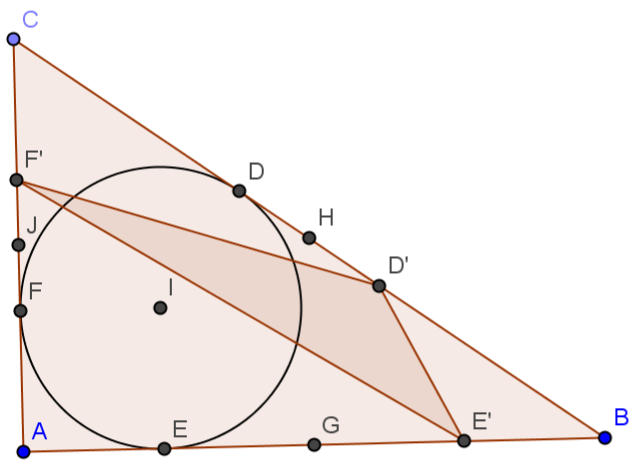
En un triángulo rectángulo ABC tenemos:



El triángulo de Gergonne

$$AE = AF = \frac{c+b-a}{2}, EB = BD = \frac{c+a-b}{2}, CF = CD = \frac{b+a-c}{2}$$

El triángulo de Nagel es:



Siendo

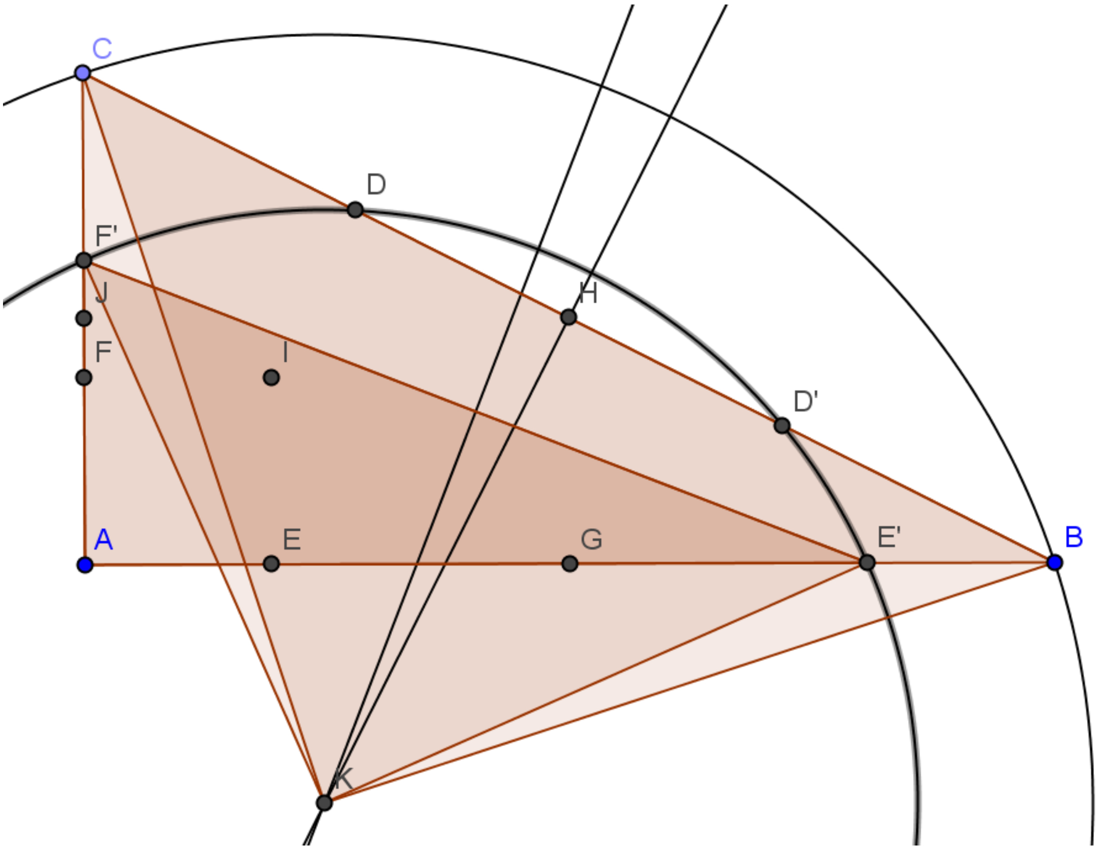
$$E'B = F'C = \frac{c+b-a}{2}, AE' = CD' = \frac{c+a-b}{2}, AF' = BD' = \frac{b+a-c}{2}$$

Y siendo $E'F' = \sqrt{AF'^2 + AE'^2} = \sqrt{\frac{b^2+a^2+c^2+2ab-2bc-2ac}{4} + \frac{b^2+a^2+c^2-2ab-2bc+2ac}{4}} = \sqrt{\frac{2b^2+2a^2+2c^2-4bc}{4}} = \sqrt{a^2-bc}$

Los segmentos CF' y BE' son girados con centro el punto K de intersección de las mediatrices de CB y de F'E', con ángulo de giro de 90º.

Así los triángulos BCK y E'F'K son rectángulos isósceles, por lo que tenemos que

$KB = \frac{a\sqrt{2}}{2}, KF' = KE' = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{a^2-bc}$



Por otra parte consideremos que

$$HD = HD' = HB - D'B = \frac{a}{2} - \frac{a+c-b}{2} = \frac{c-b}{2}$$

Además $KH = HB = \frac{a}{2}$

Así $KD = KD' = \sqrt{(\frac{a}{2})^2 + (\frac{c-b}{2})^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{a^2 - bc} = KE' = KF'$

Ricardo Barroso Campos.

Jubilado.

Sevilla.