<u>Problema 839.</u> (propuesto por Stan Fulger) Dado un triángulo ABC con triángulo de Gergonne DEF y triángulo de Nagel UVW, probar que la circunferencia circunscrita al triángulo UVW contiene al punto D si y sólo si $AB = AC$ o el triángulo ABC es rectángulo en A.

<u>Solución:</u>

Vamos a distinguir dos casos:

① Si $AB = AC$, entonces, $D = U$, por lo que la circunferencia circunscrita al triángulo UVW contiene al punto D.

② Si $c = AB \neq AC = b$, podemos suponer que $b < c$ (en caso contrario, se razonaría de forma totalmente opuesta), en cuyo caso, considerando coordenadas baricéntricas con respecto al triángulo ABC, como:

$$\begin{cases} D = (0 : a+b-c : a-b+c) \\ E = (a+b-c : 0 : -a+b+c) \\ F = (a-b+c : -a+b+c : 0) \end{cases} \qquad \begin{cases} U = (0 : a-b+c : a+b-c) \\ V = (-a+b+c : 0 : a+b-c) \\ W = (-a+b+c : a-b+c : 0) \end{cases}$$

y:

$$a+b-c < a-b+c$$

entonces, el punto D está más próximo al punto C que al punto B, por lo que, en el cuadrilátero $UDWV$ los vértices D y V son opuestos. Además, como:

$$\begin{cases} \begin{cases} DW \equiv 0 = (a-b+c)^2 x - (-a+b+c)(a-b+c)y + (-a+b+c)(a+b-c)z \\ DU \equiv 0 = x \end{cases} \\ \begin{cases} VU \equiv 0 = (a-b+c)(a+b-c)x + (-a+b+c)(a+b-c)y - (-a+b+c)(a-b+c)z \\ VW \equiv 0 = (a-b+c)(a+b-c)x - (-a+b+c)(a+b-c)y - (-a+b+c)(a-b+c)z \end{cases} \end{cases}$$

entonces:

$$\begin{cases} S\cot(\triangle WDU) = \dfrac{S_B\left[(a-b+c)^2 - (-a+b+c)(a+b-c)\right] + S_C\left[(a-b+c)^2 + (-a+b+c)(a-b+c)\right]}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ (a-b+c)^2 & -(-a+b+c)(a-b+c) & (-a+b+c)(a+b-c) \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}} \\ S\cot(\triangle UVW) = \dfrac{S_A\left[4a(c-b)(-a+b+c)^2\right] + S_B\left[4b^2(a-b+c)^2\right] + S_C[4b(a-b)(a-b+c)(a+b-c)]}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ (a-b+c)(a+b-c) & (-a+b+c)(a+b-c) & -(-a+b+c)(a-b+c) \\ (a-b+c)(a+b-c) & -(-a+b+c)(a+b-c) & -(-a+b+c)(a-b+c) \end{vmatrix}} \end{cases}$$

por lo que:

$$S[\cot(\triangle WDU) + \cot(\triangle UVW)] = \frac{2ac(b-c)(-a^2+b^2+c^2)}{(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}$$

y, como la circunferencia circunscrita al triángulo UVW contiene al punto D si y sólo si el cuadrilátero $UDWV$ es cíclico, es decir, si y sólo si los ángulos $\measuredangle WDU$ y $\measuredangle UVW$ son suplementarios, resulta que la circunferencia circunscrita al triángulo UVW contiene al punto D si y sólo si $\cot(\measuredangle WDU) + \cot(\measuredangle UVW) = 0,$ lo cual ocurre si y sólo si $a^2 = b^2 + c^2,$ es decir, si y sólo si el triángulo ABC es rectángulo en A.