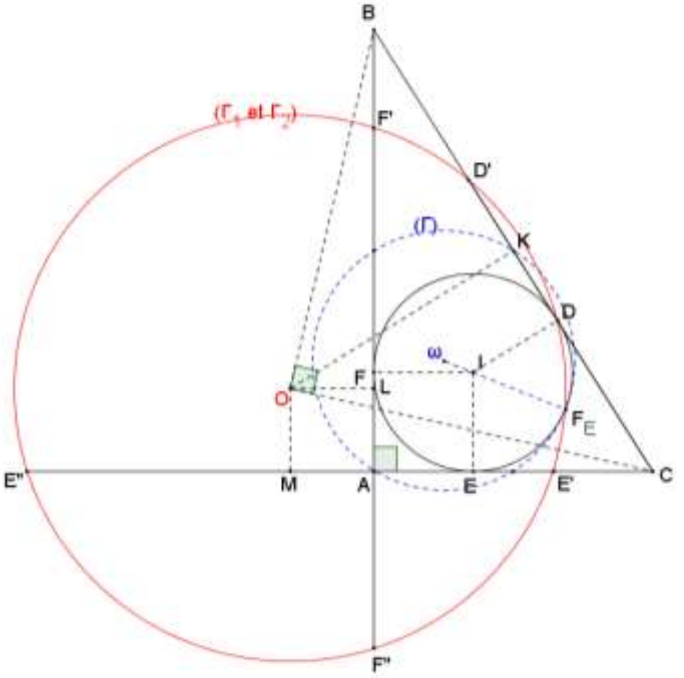
Problema n°839
Propuesto por Jean Louis Aymé
Sea ABC un triángulo rectángulo en A. 1 la circunferencia inscrita de ABC. DEF el triángulo de contacto (Gergonne) de ABC. D' E' F' el triángulo de Nagel de ABC.1' la circunferencia circunscrita a D'E'F'.Probar que 1' contiene a D.
Fulger, S. (2017): Comunicación personal

Solution proposée par Philippe Fondanaiche



On retient les notations traditionnelles: BC = a, CA = b, AB = c, s = (a + b + c)/2, r = (– a + b + c)/2 avec s démi-perimètre du triangle ABC et r rayon du cercle inscrit..
Comme le triangle ABC est rectangle en a, on la relation $a^2 = b^2 + c^2$.
On suppose connu le lemme suivant (voir p.2 http://yufeizhao.com/olympiad/geolemmas.pdf)
Les points de contact du cercle inscrit et des trois cercles exinscrits avec les côtés d'un triangle ABC sont respectivement symétriques par rapport aux milieux des côtés.
On en déduit AF = BF' = AE = CE' = r, CD = CE = BD' = b – r et BD = BF = AF' = c – r.
On trace le cercle (Γ_1) qui passe par les trois points D,D' et F'. La droite (AB) coupe ce cercle en deux points F' et F". La puissance de B par rapport à ce cercle est égale à BD.BD' = BF'.BF".
Or BD.BD' = (c – r).(b – r) = (a – b + c).(a + b – c)/4 = $(a^2 – (c – b)^2)/4$ = bc/2 = aire du triangle ABC.
Comme BF'.BF" = r.(r + F'F") = aire de ABC, il en resulte que r + F'F" = s.
D'où F'F"" = a puis AF" = a – (c – r) = b – r = AE'.
On trace le cercle (Γ_2) qui passe par les trois points E',F' et F". La droite (AC) coupe ce cercle aux points E' et E" tels que AE" = AF' (AF'E" est rectangle isocèle comme AE'F").
On va démontrer que les cercles (Γ_1) et (Γ_2) ont même centre O et comme ils ont deux points communs F' et F", ils sont confondus.
Le centre O_1 du cercle (Γ_1) est à l'intersection des médiatrices de F'F" et de DD' (ou encore de BC). Ses coordonnées dans le repère (AC,AB) sont données par les équations des deux droites Y– c/2 = b(X – b/2)/c et Y = (c – b)/2. d'où $x(O_1)$ = (b – c)/2 et $y(O_1)$= (c – b)/2.
Le centre O_2 du cercle (Γ_2) est à l'intersection des médiatrices des cordes E'E" et F'F" qui sont de même longueur = a. On en déduit : $x(O_2)$ = b – r – a/2 = (b – c)/2 et $y(O_2)$= a/2 – b – r = (c – b)/2.
Les points O_1 et O_2 sont donc confondus en un même point O. On vérfie aisément que $OC^2 = a^2/2$. Le triangle OBC est rectangle isocèle et le point O appartient au cercle circonscrit au triangle ABC.
Conclusion : les quatre points D,D',E' et F' sont sur un même cercle dont le centre appartient au cercle circonscrit au triangle ABC.

Remarques:
1) Le cercle circonscrit au triangle de Nagel D'E'F' est appelé cercle de Mandart. Dans le cas général d'un triangle ABC scalène, il a la propriété de passer par le point de Feuerbach F_E du triangle ABC qui est le point de tangence du cercle inscrit avec le cercle des neuf points. La figure ci-dessus permet ainsi de vérifier que la cercle de Mandart passe par les cinq points D,D',E',F' et F_E.
2) Ce problème donne en quelque sorte la réciproque du problème n°3 proposé en 2013 aux Olympiades Internationales de Mathématiques.