EXTRA de verano de 2017 Del 1 de Julio al 31 de Agosto

Propuesto por Jean Louis Aymé

***Problema* 839.-**

Sea ABC un triángulo rectángulo en A. l la circunferencia inscrita de ABC.

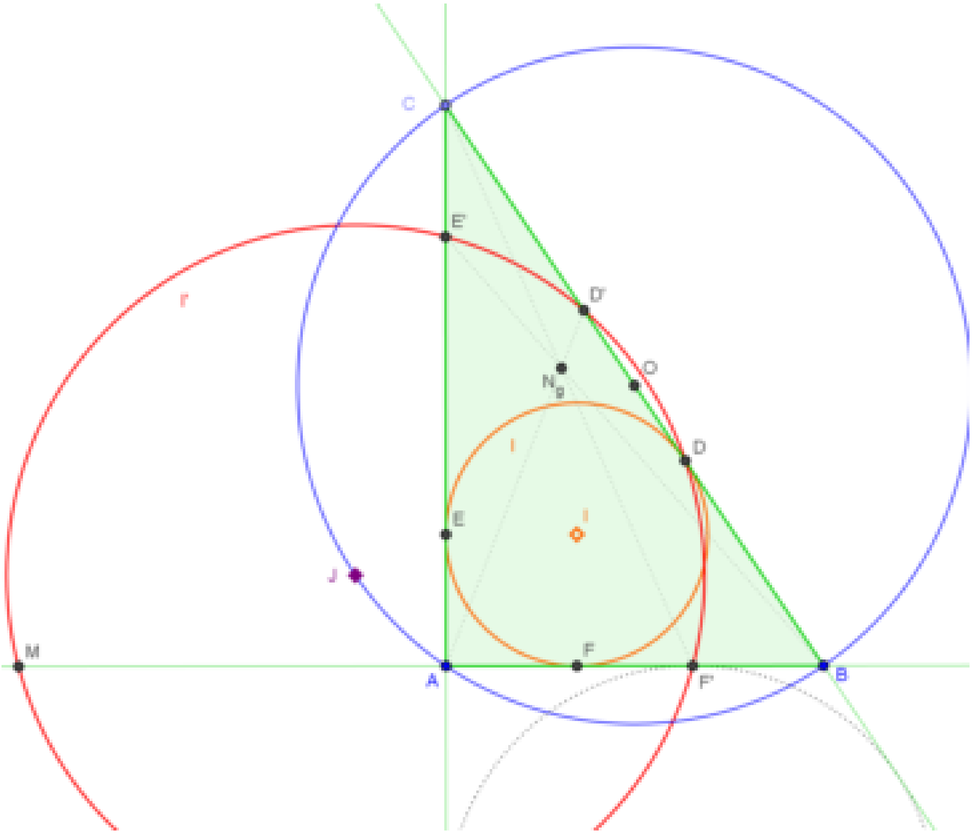
DEF el triángulo de contacto (Gergonne) de ABC.

$D'E'F'$ el triángulo de Nagel de ABC.

l' la circunferencia circunscrita a $D'E'F'$.

Probar que l' contiene a D.

Fulger, S. (2017): Comunicación personal



Solución de Saturnino Campo Ruiz, Profesor de Matemáticas jubilado, de Salamanca.

Utilizando coordenadas baricéntricas relativas al triángulo ABC, tenemos para los puntos de la circunferencia de Nagel los puntos $D'(0 : s-b : s-c)$; $E'(s-a : 0 : s-c)$ y $F'(s-a : s-b : 0)$.

La ecuación de una circunferencia en estas coordenadas es de la forma

$\Gamma(x,y,z) - (x+y+z)(px+qy+rz) = 0$

donde $\Gamma(x,y,z) = 0$ es la ecuación de la circunferencia circunscrita al triángulo ABC, es decir:

$a^2yz + b^2zx + c^2xy = 0$

Sustituyendo los puntos del triángulo de Nagel en esta expresión, después de ciertas simplificaciones, se obtienen las ecuaciones

$$\frac{q}{s-c} + \frac{r}{s-b} = a$$

$$\frac{p}{s-c} + \frac{r}{s-a} = b$$

$$\frac{p}{s-b} + \frac{q}{s-a} = c$$

Resolviendo, con mucha paciencia, se obtienen $p = \frac{a\cdot(s-a)\cdot s - (b+c)\cdot(s-b)\cdot(s-c)}{2\cdot(s-a)}$,

$q = \frac{a\cdot(s-b)\cdot(s-c) - (b-c)\cdot(s-a)\cdot s}{2\cdot(s-b)}$ y $r = \frac{a\cdot(s-b)\cdot(s-c) + (b-c)\cdot s\cdot(s-a)}{2(s-c)}$.

En el triángulo rectángulo (en A), se verifica $s(s-a) = \acute{A}rea = (s-b)(s-c) = \frac{bc}{2}$.

Aplicando esto en nuestro caso se tienen

$$p = \frac{a\cdot(s-a)\cdot s - (b+c)\cdot(s-b)\cdot(s-c)}{2\cdot(s-a)} = \frac{s(s-a)(a-b-c)}{2\cdot(s-a)} = -s(s-a) = -\frac{bc}{2},$$

$$q = \frac{a(s-b)(s-c) - (b-c)(s-a)s}{2\cdot(s-b)} = \frac{(s-b)(s-c)(a-b+c)}{2\cdot(s-b)} = (s-b)(s-c) = \frac{bc}{2}$$

$$r = \frac{a(s-b)(s-c) + (b-c)s(s-a)}{2(s-c)} = \frac{(s-b)(s-c)(a-b+c)}{2(s-c)} = \frac{bc}{2}.$$

Con esto la ecuación de la circunferencia de Nagel para este triángulo es:

$$\Gamma(x,y,z) - \frac{bc}{2}(x+y+z)(-x+y+z) = 0$$

El punto $D(0 : s-c : s-b)$ verifica esta ecuación como puede comprobarse ahora fácilmente.■