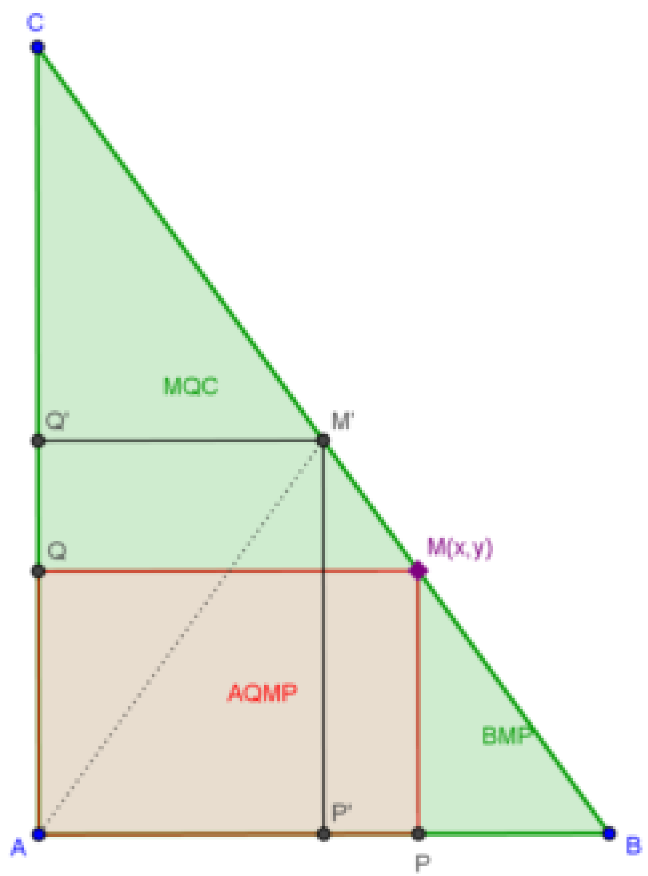
***Problema* 840.-**
Segundo día

5.- *Considere un triángulo rectángulo ABC, donde la hipotenusa es BC. M un punto en BC y P y Q las proyecciones de M en AB y AC respectivamente. Pruebe que para ninguno de tales puntos M son iguales las áreas de los triángulos BMP y MQC y la del rectángulo $AQMP$.*

I Olimpiada Mexicana de Matemáticas (1987)

http://ichi.fismat.umich.mx/recursos/nacionales/I.html



Solución de Saturnino Campo Ruiz, Profesor de Matemáticas jubilado, de Salamanca.

La suma de las áreas de los triángulos es igual al la diferencia entre el área de triángulo ABC y el área del rectángulo $AQMP$. Queremos ver que estas dos áreas nunca son iguales, esto es, que la diferencia entre la suma de las áreas de los triángulos y el área del rectángulo es un número de signo constante, independientemente del M elegido sobre la hipotenusa.

Suponiendo unos ejes centrados en A, la expresión de la suma de las áreas de los triángulos menores es $\frac{bc}{2} - xy$; la diferencia con el área del rectángulo será pues $\frac{bc}{2} - 2xy$. La relación entre la x y la y viene dada por la ecuación $y = b - \frac{b}{c}x$, por tanto podemos poner

$$\left(\frac{bc}{2} - xy\right) - xy = \frac{bc}{2} - 2bx\left(1 - \frac{x}{c}\right) = \frac{b}{2c}\left(4x^2 - 4cx + c^2\right) = \frac{b}{2c}(2x - c)^2 \geq 0$$

De donde se deduce que únicamente cuando M es el punto medio de la hipotenusa se igualan esas áreas.■