FLUX GÉOMÉTRIQUE [1]

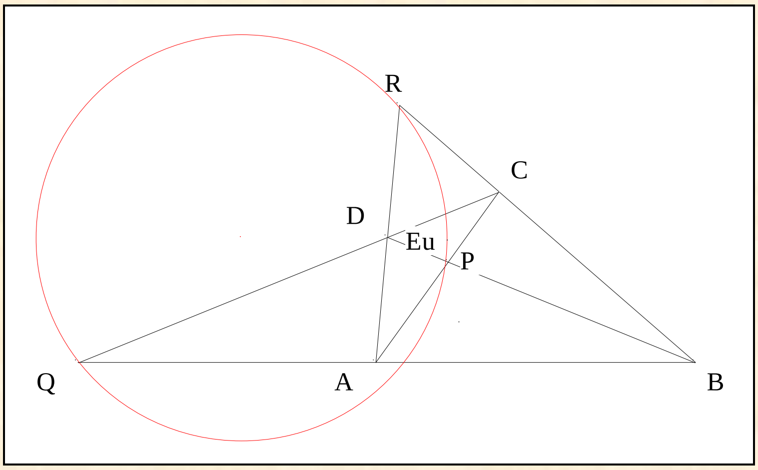
THE BRIANCHON-PONCELET's FIRST CIRCLE

REVISITED

A PURELY CONTEMPLATIVE PROOF

C'est la Beauté qui produit toute unité et qui est principe universel,
parce qu'elle produit et qu'elle meut tous les êtres
en leur donnant
l'amoureux désir de leur propre beauté. [2]

Jean-Louis AYME [3]



[1] emprunt savant du XIVe siècle au latin *fluxus* "écoulement"
[2] Saint Denys l'Aréopagite dans le *Traité des Noms divins*
[3] St-Denis, Île de la Réunion (Océan Indien, France), le 04/08/2017 ; jeanlouisayme@yahoo.fr

Résumé. L'auteur se référant à l'article de Michal Rolinek et Le Anh Dung paru en 2014 dans *Forum Geometricorum* [4], représente le cercle de Brianchon-Poncelet sous un flux géométrique purement contemplatif.
Les figures sont toutes en position générale et tous les théorèmes cités peuvent tous être démontrés synthétiquement.

Abstract. The author referring to the article by Michal Rolinek and Le Anh Dung in 2014 in *Forum Geometricorum*, represents the Brianchon - Poncelet circle under a geometric flow purely contemplative.
The figures are all in general position and all cited theorems can all be shown synthetically.

Resumen. El autor refiriéndose al artículo de Michal Rolinek y Le Anh Dung en 2014 en *Forum Geometricorum*, representa el Brianchon - Poncelet círculo bajo flijo geometrico puramente contemplativo.
Las figuras están todos en posición general y todos los teoremas mencionados pueden todos ser demostrados sintéticamente.

Zusammenfassung. Der Autor, bezugnehmend auf den Artikel von Michal Rolinek und Le Anh Dung 2014 im *Forum Geometricorum* stellt Brianchon - Poncelet Kreis unter einem geometrischen Fluss rein kontemplative.
Die Figuren sind alle in einer allgemeinen Position und alle genannten Lehrsätze synthetisch nachgewiesen werden können.

[4] Rolinek M. and Le Anh Dung, The Miquel Points, Pseudocircumcenter, and Euler-Poncelet Point of a Complete Quadrilateral, *Forum Geometricorum*, Volume **14** (2014) 145–153 ; http://forumgeom.fau.edu/FG2014volume14/FG201413.pdf

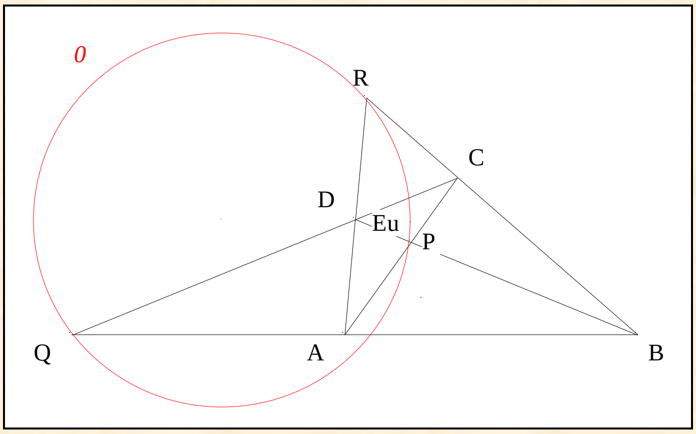
Sommaire

A. PRÉSENTATION DU PROBLÈME

1. Le premier cercle de Brianchon-Poncelet

VISION

Figure :



Traits :	ABCD	un quadrilatère convexe,
	Eu	le point d'Euler-Poncelet de ABCD,
	PQR	le triangle diagonal de ABCD
et	*0*	le cercle circonscrit à PQR.

Donné : *0* passe par Eu.[5]

Scolie : *0* est "le premier cercle de Brianchon-Poncelet de ABCD".

Commentaire : le lecteur pourra aussi consulté l'article écrit en 2011 par l'auteur et intitulé "Le point d'Euler-Poncelet d'un quadrilatère" [6], lire la remarque à la page 27 et consulter l'archive à la page 121.

Note historique : selon l'auteur, Michal Rolinek [7] et Le Anh Dung [8] sont les premiers à en avoir donné une résolution synthétique sans coniques, excepté le cercle, à ce problème mais en ayant recours à des transformations (similitudes, inversion).

---

[5] Brianchon C. J., Poncelet J.-V., Recherche sur la détermination d'une hyperbole équilatère au moyen de quatre conditions données, *Annales de Mathématiques pures et Appliquées* tome (1821-1822) 205-220 ;
Annales Mathématiques de Montpellier vol. **XI** (01/01/1821) 504-516 ; théorème **VI**, p. 510
Annales de Gergonne tome **11** (1820-21) 205-220 ; http://www.numdam.org/item/AMPA_1820-1821__11__205_0

[6] Ayme J.-L., Le point d'Euler-Poncelet d'un quadrilatère, G.G.G. vol. **8** ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/

[7] Rolinek M., Institute of Science and Technology, Austria ; Am Campus 1, Klosterneuburg 3400, Austria

[8] Le Anh Dung, Bozeny Nemcove 96, Tachov 34701, Czech Republic

"Academically speaking, I just finished my PhD in Institute of Science and Technology Austria in theoretical computer science.
Geometrically speaking, my interest in synthetic plane geometry culminated about four years ago when *106 and 107 geometry problems* [9] (and the article you are mentioning) came out.
I don't have much time for geometry these days, although I try to keep my presence in the math olympiad world.
Personally speaking, I like mountains, martial arts, cold showers, and ballroom dancing."

2. Le point de vue de l'auteur

trois géomètres talentueux, à savoir Leonhard Euler, Charles-Julien Brianchon et Jean-Victor Poncelet ont contribué de mettre en exergue le cercle précédent en considérant une hyperbole…
Deux géomètres contemporains cités ci-avant, ont réussi en recourrant à des transformations à se passer de l'hyperbole…
L'auteur découvrant récemment leur article, a pour ambition de présenter une preuve purement contemplative sans transformations, *in-ventée* au sens médiéval de ce terme [10].

La preuve se déroule par étapes et chaque étape renvoie à une visualisation.

---

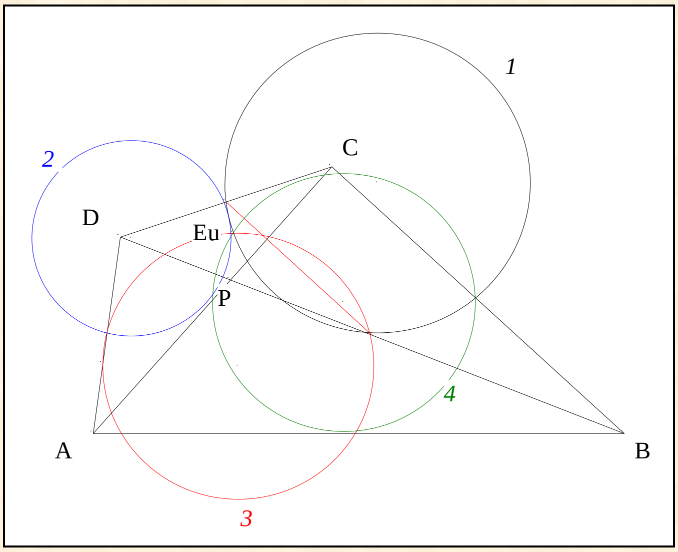
9 https://www.awesomemath.org/product/106-geometry-problems-from-the-awesomemath-summer-program/
https://www.awesomemath.org/product/107-geometry-problems-from-the-awesomemath-year-round-program/
10 Ayme J.-L., Mexican Olympiad 2012 Problem **6**, G.G.G. vol. **30**, p. 8 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/

B. VISUALISATION

1. Le point d'Euler-Poncelet

VISION

Figure :



Traits : ABCD un quadrilatère convexe ou non
et *1, 2, 3, 4* les cercles d'Euler resp. des triangles BCD, CDA, DAB.

Donné : *1, 2, 3* et *4* sont concourants.

Commentaire : une preuve synthétique de l'auteur qui peut être vue en **C. I.**,
a été retenue par Alexander Bogomolny sur son site intitulé *Cut the Knot* [11].

Note historique : l'auteur a associé le nom d'Euler au point de concours suite à un article [12] de la littérature géométrique qui indiquait qu'Euler avait approché ce point en considérant un quadrilatère cyclique.
En 1821, Jean-Victor Poncelet [13] publie en collaboration avec Charles Julien Brianchon, ce résultat qu'il avait envisagé durant sa captivité en Russie en considérant une conique et le concept de polaire. Signalons que dans son article, Poncelet (re)démontre dans le théorème **IX**, le cercle d'Euler et plus précisément le cercle des neuf points.
En 1904, Theodor Lemoyne [14] signale ce résultat et en 1912, Vollrat Happach [15] précise que ce résultat devait être connu, sans doute, avant lui.
En 1929, Roger Arthur Johnson [16] en donne une solution angulaire.

---

11 Interactive Mathematics Miscellany and Puzzles, *Cut the Knot* ; http://www.cut-the-knot.org/m/Geometry/PonceletPoint.shtml
12 Référence non retrouvée
13 Brianchon C. J., Poncelet J.-V., Recherche sur la détermination d'une hyperbole équilatère au moyen de quatre conditions données, *Annales de Mathématiques pures et Appliquées* (1821-1822) 223-235 ;
Annales Mathématiques de Montpellier vol. **XI** (01/01/1821) 504-516 ; théorème **VII**, p. 511
14 Lemoyne M. T., Note de géométrie, *Nouv. Ann. Math.* **4**, (1904) 400-402
15 Happach V., *Zeitschrift für Math. und Nat. Unterricht* **43** (1912) 175

Scolies : **(1)** sous le point de vue des cercles d'Euler,
ce point de concours, noté Eu, est "le point d'Euler de ABCD"
ou encore
"Gleichseitigehyperbelzentrums Z" par Daniel Baumgartner et Roland Stark [17]

(2) sous le point de vue des cercles pédaux [18],
leur point de concours, noté Po, est "le point de Poncelet de ABCD"

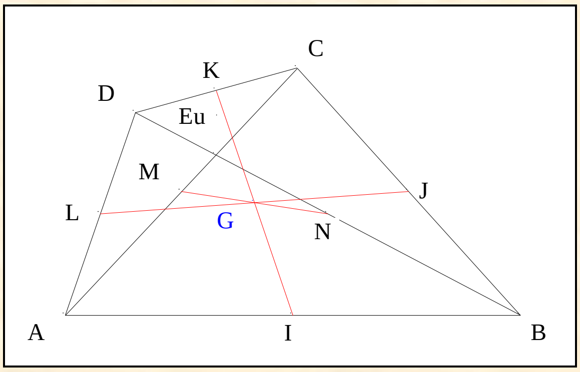
(3) Po et Eu étant confondus [19], nous parlerons "du point d'Euler-Poncelet de ABCD"

(4) Eu existe si ABCD n'est pas orthocentrique i.e. que chaque sommet n'est pas l'orthocentre du triangle déterminé par les trois autres, sinon les quatre cercles d'Euler coïncident.

2. Le point médian

VISION

Figure :



Traits : ABCD un quadrilatère convexe ou non
et I, J, K, L, M, N les milieux resp. de [AB], [BC], [CD], [DA], [AC], [BD].

Donné : [IK], [JL] et [MN] sont concourantes. [20]

Commentaire : une preuve synthétique de ce résultat peut être vue en **C. II**.

Scolies : **(1)** ce point de concours, noté G, est "le point médian de ABCD"

(2) d'après "La droite de Gauss" [21], G est sur la gaussienne (MN) de ABCD.

---

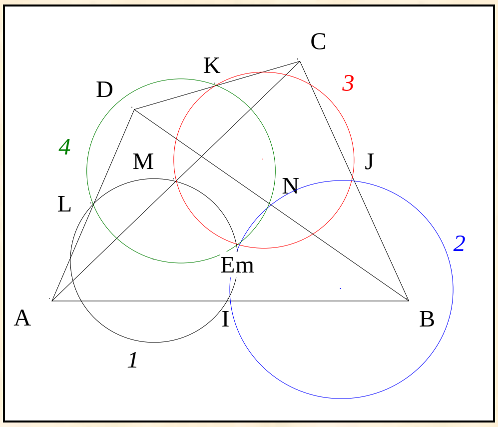
[16] Johnson R. A, *Advanced Euclidean Geometry*, Dover, New York, 1960 (from 1929 original) 240-243
[17] Baumgartner D., Stark R., *Ein merkwuerdiger Punkt des Vierecks* **1**, 10.Satz, p. 8 ; http://www.geometria.ch/geometrie/empdv.pdf
Publiziert in PM (Praxis der Mathematk) 1/44 Jg.2002
[18] Ayme J.-L., Le point d'Euler-Poncelet d'un quadrilatère, G.G.G. vol. **8**, p. 16-22 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/
[19] Ayme J.-L., Le point d'Euler-Poncelet d'un quadrilatère, G.G.G. vol. **8**, p. 23-27 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/
[20] Gergonne, Lavernède, Thomas J. E., *Annales de Gergonne* **1** (1810-1811) 177 ;
http://www.numdam.org/issues/AMPA_1810-1811__1_
[21] Ayme J.-L., La droite de Gauss et la droite de Steiner, G.G.G. vol. **4**, p.1-4 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/

Note historique : ce théorème proposé par Gergonne, Lavernède et Thomas, a été résolu [22] dans la même *Annales* par Rochat, professeur de navigation à St Brieuc, Simon L'huilier, professeur à Genève, Vecten professeur à Nîmes, Tédenat recteur de l'Académie de Nîmes et Stainville L., auteur d'un *Recueil de Problèmes*.

3. Le point de Bennett

VISION

Figure :



Traits : ABCD un quadrilatère convexe ou non,
I, J, K, L, M, N les milieux resp. de [AB], [BC], [CD], [DA], [AC], [BD]
et *1*, *2*, *3*, *4* les A, B, C, D-cercles de Bennett de ABCD.

Donné : *1*, *2*, *3* et *4* sont concourants [23].

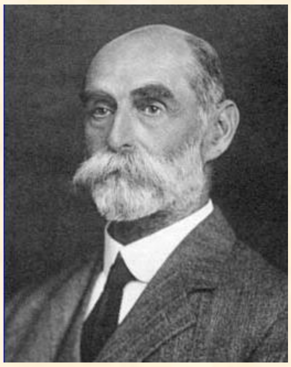
Commentaire : une preuve synthétique de ce résultat peut être vue en **C. III**.

Scolie : ce point de concours, noté Em, est "le point de Bennett de ABCD" [24]
ou encore
"pseudocircumcenter", "TangentialPunkt T" par Daniel Baumgartner et Roland Stark[25]
ou encore
"Isoptic Point or Benett point" par John Wentworth Clawson [26], Henry Martyn Cundy et Cyril Frederick Parry [27]
ou encore
"Isogonal Center" par Chris van Tienhoven [28].

---

22 *Annales de Gergonne* **1** (1810-1811) 310
23 Sharygin I. F., *Problemas de geometria*, Editions Mir, Moscou (1986), **II.** 210 p.112.
24 Schmidt E., Miquel-, Poncelet- und Bennett-Punkt eines Vierecks ; http://eckartschmidt.de/Pktve.pdf
25 Baumgartner D., Stark R., *Ein merkwuerdiger Punkt des Vierecks* **1**, 10.Satz, p. 8 ; http://www.geometria.ch/geometrie/empdv.pdf
Publiziert in PM (Praxis der Mathematk) 1/44 Jg.2002
26 J.W. Clawson J. W., The complete Quadrilateral – *American Mathematical Monthly*, Volume **20**, N°**4** (Jul., 1919) 232-261 ; http://www.jstor.org/stable/1967118
27 H.M. Cundy H. M. and Parry C. F., Geometrical properties of some Euler and circular cubics. Part **2**. *Journal of Geometry* **68** (2000) 63
28 Van Tienhoven C., *Encyclopedia of Quadri-Figures* (EQF) ;
http://www.chrisvantienhoven.nl/quadrangle-objects/15-mathematics/quadrangle-objects/artikelen-qa/25-qa-p4.html.

Une courte biographie de Geoffroy Thomas Bennett [29]



Geoffrey Thomas Bennett, fils de Thomas Bennett (né vers 1840) et de Selina Bennett (née vers 1837), entre à l'University College School où enseigne Robert Tucker. Après trois années passées, il entre à l'University College et, en décembre 1886, obtient une bourse pour étudier au St John's College à Cambridge où il étudie au Tripos de mathématiques.
Senior Wrangler [30] au Tripos de 1890, derrière Philippa Fawcett [31], classée première, il en est le premier en 1891, puis premier Smith l'année suivante. Membre du St John's College en 1892, il est nommé l'année suivante, professeur de mathématique à l'Emmanuel College.
Élu membre Senior du l'Emmanuel College en 1899, puis membre du Conseil de la Société mathématique de Londres de 1908 à 1911, il en est le secrétaire de 1915 à 1916.
Lors du recensement de 1911, G. T. Bennett est noté comme célibataire, maître de conférences en mathématiques vivant à Road 156 du roi Henri à Hampstead, ses parents, Thomas (71 ans) et Selina (74 ans) vivant avec lui.
Élu Fellow de la Royal Society de London en 1914, Percy MacMahon le décrit, dans une lettre envoyée à D'Arcy Thompson, comme "le géomètre principal du pays".
Après la fin de la guerre en 1918, il retourne à l'Emmanuel College où il reprend ses fonctions.

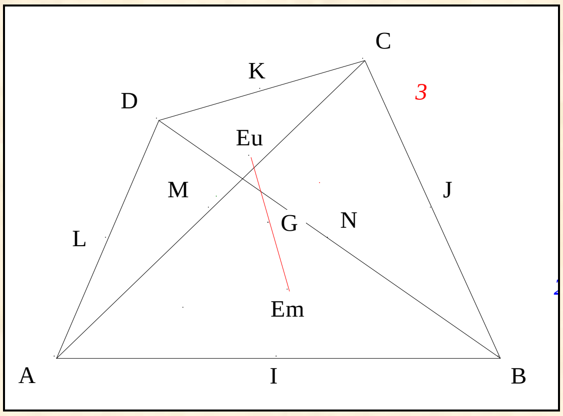
Geoffroy Thomes Bennett dit "le castor" à cause de sa formidable barbe blanche décède en 1943.

4. Les points de Bennett, médian et d'Euler-Poncelet

VISION

Figure :

[29] O'Connor J. J. and Robertson E. F. ; http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Bennett.html
[30] A l'université de Cambridge, un wrangler est un étudiant qui a obtenu les meilleurs résultats
[31] http://spartacus-educational.com/WfawcettP.htm



Traits : ABCD un quadrilatère convexe,
Eu le point d'Euler-Poncelet de ABCD
G le point médian de ABCD
et Em le point de Bennett de ABCD.

Donné : Em est le symétrique de Eu par rapport à G.

Commentaire : une preuve synthétique de ce résultat peut être vue en **C. III**.

Note historique : of course all these points also can be found in EQF i.e. the *Encyclopedia of Quadri-Figures*, section Quadrangle Points, points QA-P2 and QA-P4. [32]

Remarques : en se restreignant à un quadrilatère cyclique [33],

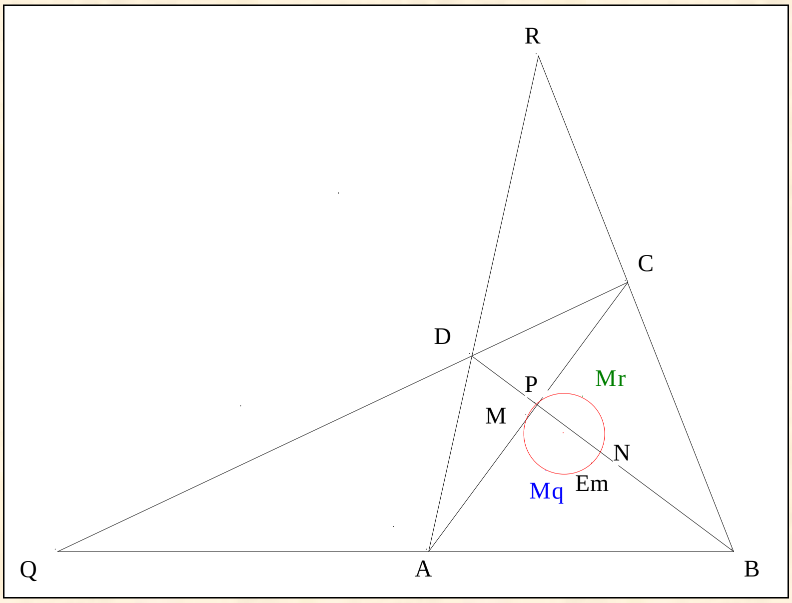
- * l'anticentre correspond au point de Euler-Poncelet
- * le point médian au point médian
- * le centre du cercle au point de Bennett.

5. Les seconds cercles de Brianchon-Poncelet

VISION

Figure :

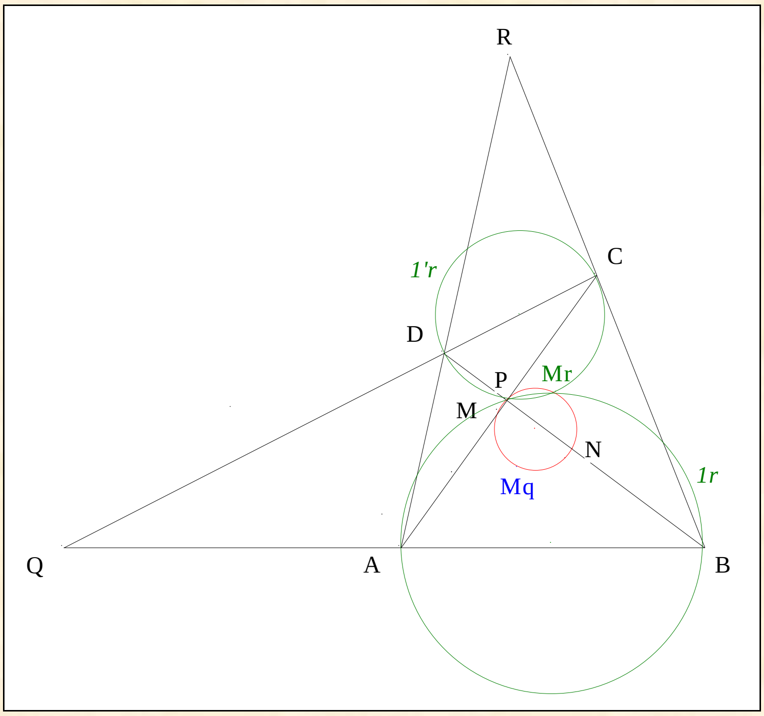
[32] Van Tienhoven, EQF ; http://www.chrisvantienhoven.nl/index.php/quadrangle-objects.html
[33] Ayme J.-L., A propos de l'anticentre d'un quadrilatère cyclique, G.G.G. vol. **8** ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/



Traits : ABCD un quadrilatère convexe,
M, N les milieux resp. de [AC], [BD],
P, Q, R les points d'intersection resp. de (AC) et (BD), (AB) et (CD), (AD) et (BC),
Mq, Mr les points de Miquel resp. des deltas [QBC, (RDA)], [PCD, (QAB)]
et Em le point de Bennett de ABCD.

Donné : Mq, Mr, M, N, P et Em sont cocycliques. [34]

VISUALISATION

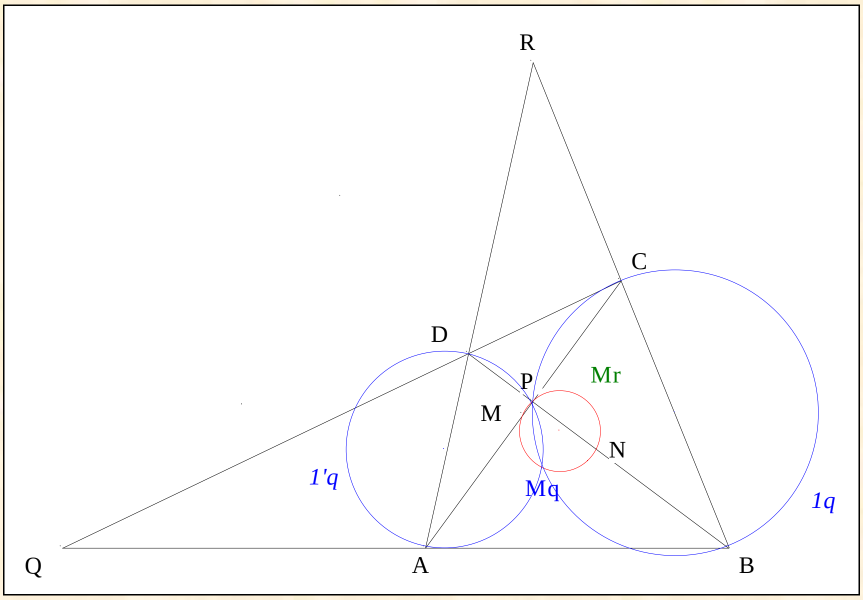


- Notons *1r*, *1'r* les cercles circonscrits resp. aux triangles PAB, PCD.

[34] Ayme J.-L., Three concurrent circles, AoPS du 08/07/2017 ;
https://artofproblemsolving.com/community/c6h1474939_three_concurrent_circles

- **Scolie :** par définition de Mr, *1r* et *1'r* passent par Mr.

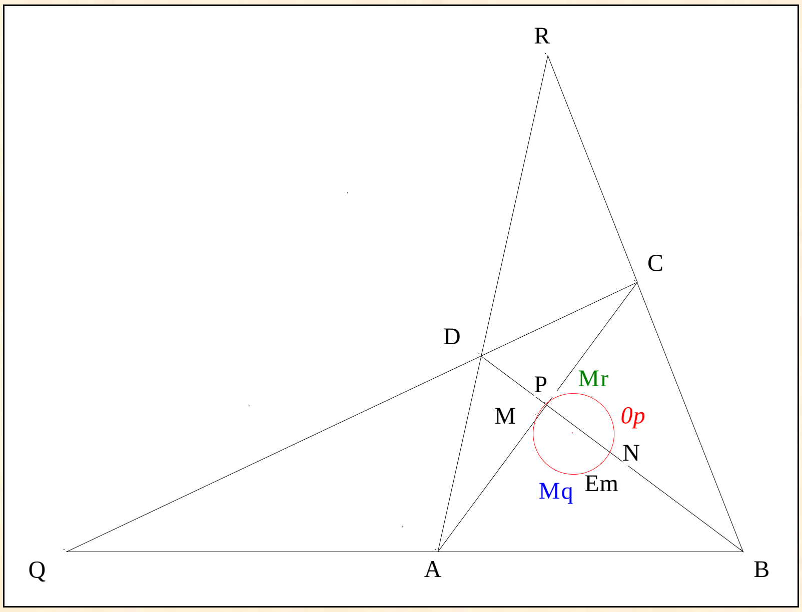
- **Conclusion partielle :** d'après "Le cercle des milieux" [35], Mr, M, N et P sont cocycliques.



- Notons *1q*, *1'q* les cercles circonscrits resp. aux triangles PBC, PDA.

- **Scolie :** par définition de Mq, *1q* et *1'q* passent par Mq.

- D'après "Le cercle des milieux" [36], Mq, M, N et P sont cocycliques.



- **Conclusion partielle :** Mq, Mr, M, N et P sont cocycliques.

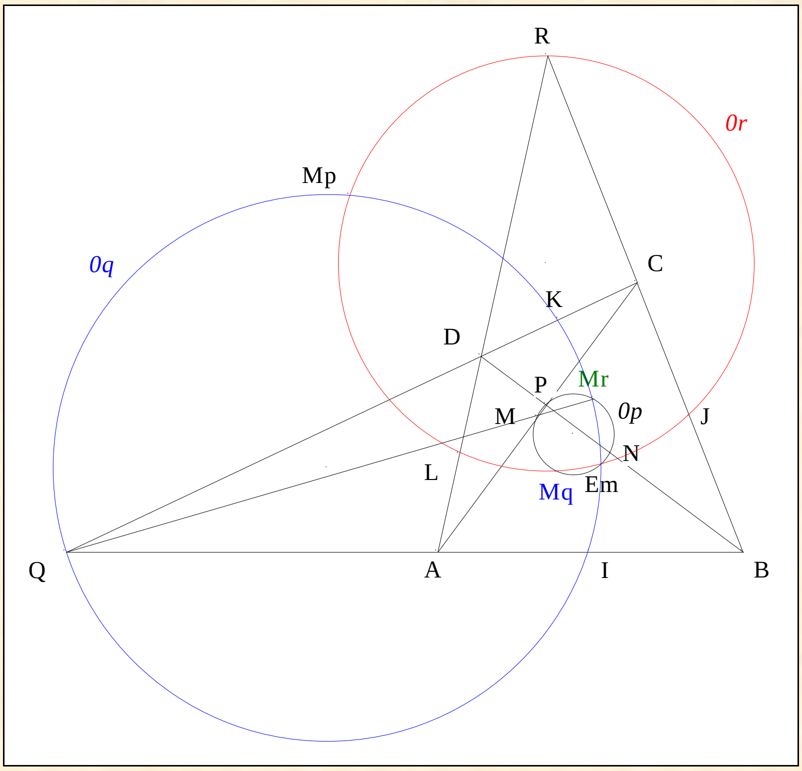
- Notons *0p* ce cercle.

- D'après **C. V**, *0p* passe par Em.

[35] Ayme J.-L., The midcircle theorem, G.G.G. vol. **25**, p. 3-5 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/
[36] Ayme J.-L., The midcircle theorem, G.G.G. vol. **25**, p. 3-5 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/

- **Conclusion :** Mq, Mr, M, N, P et Em sont cocycliques.

Scolies : **(1)** les autres seconds cercles de Brianchon-Poncelet



- Notons Mp le point de Miquel du delta [RAB, (QDC)].

- **Conclusion :** mutatis mutandis,
  nous montrerions que
  * Mr, Mp, I, K, Q et Em sont cocycliques [37]
  * Mp, Mq, J, L, R et Em sont cocycliques.

- Notons *0q*, *0r* ces cercles.

- D'après **C. V**, *0q*, *0r* passent par Em.

(2) PQR est "le triangle diagonal de ABCD"

(3) MpMqMr est "le triangle de Miquel de ABCD"

Énoncé traditionnel :

les seconds cercles de Brianchon-Poncelet
concourrent
au point de Benett.

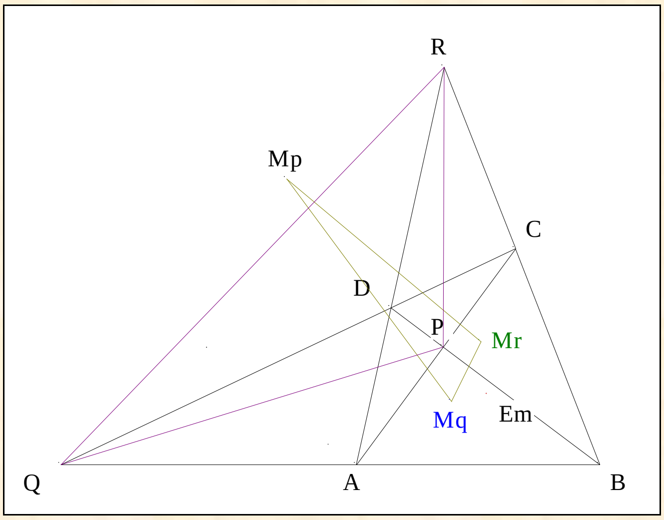
6. Les triangles diagonal et de Miquel sont perspectifs

---

[37] Ayme J.-L., Three concurrent circles, AoPS du 08/07/2017 ;
https://artofproblemsolving.com/community/c6h1474939_three_concurrent_circles

VISION

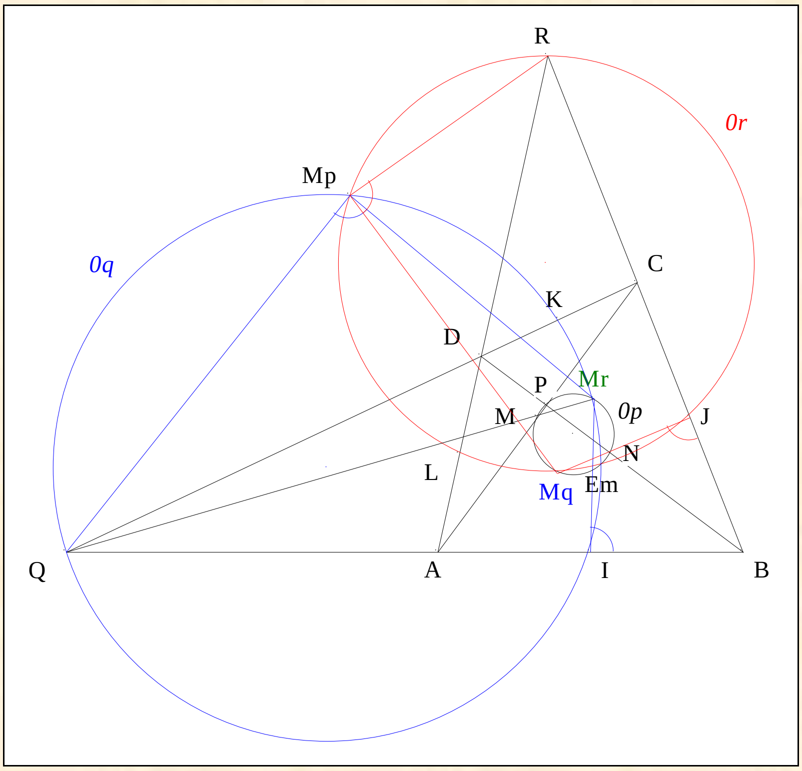
Figure :



Traits : les hypothèses et notations sont les mêmes que précédemment.

Donné : le triangle diagonal PQR
est en perspective de centre Em
avec le triangle de Miquel MpMqMr.

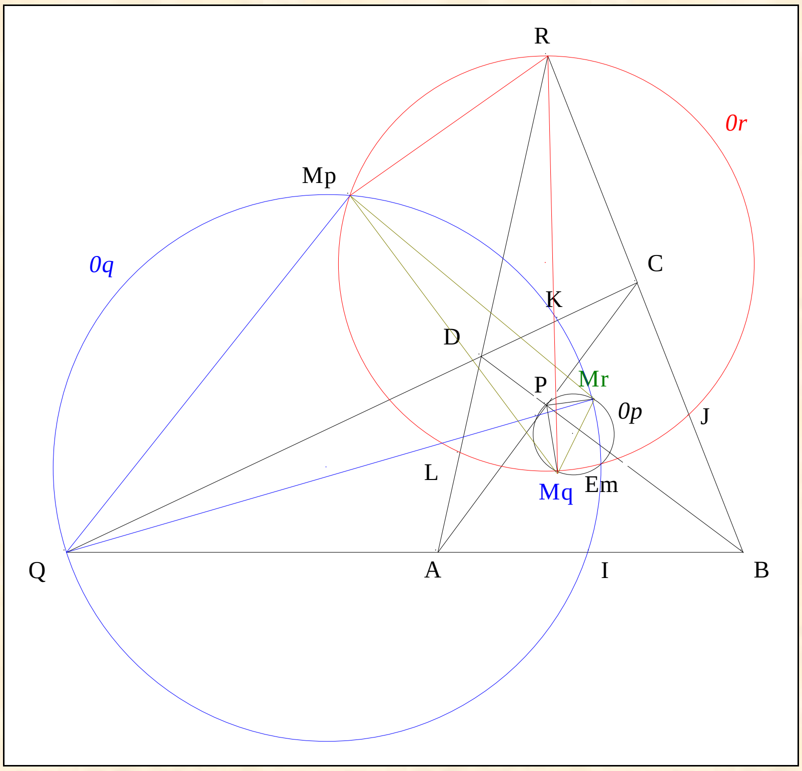
VISUALISATION



- Une chasse angulaire :

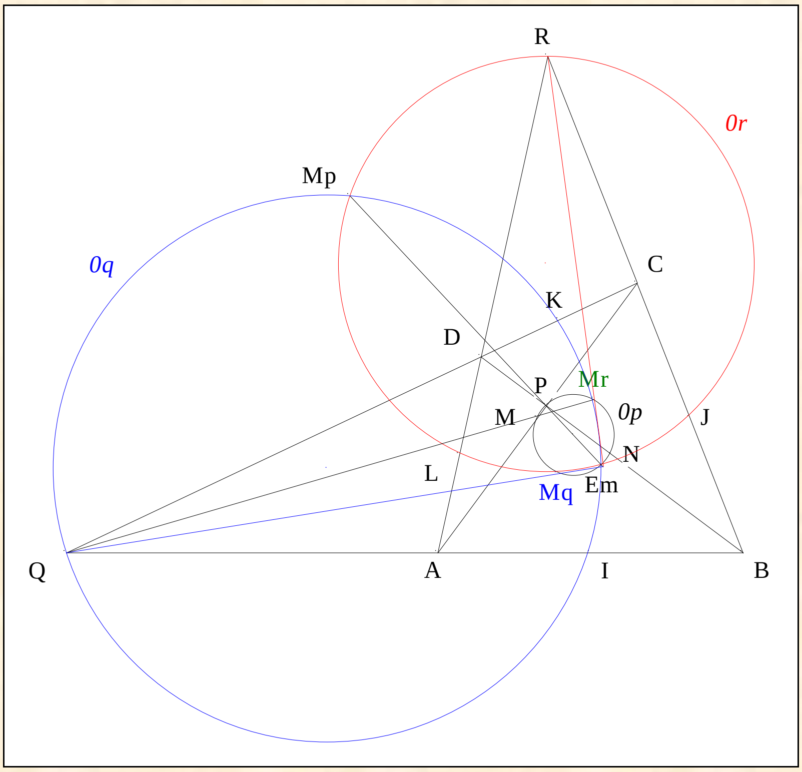
 * le quadrilatère MqMpRJ étant cyclique, <MqMpR = <MqJB

*	d'après **C. V**,	<MqJB = <BIMr
*	le quadrilatère MrMpQI étant cyclique,	<BIMr = <QMpMr
*	par transitivité de =,	<MqMpR = <QMpMr.



- Par permutation circulaire, nous montrerions que **(1)** <MrMqP = <RMqMp

  (2) <MpMrQ = <PMrMq.

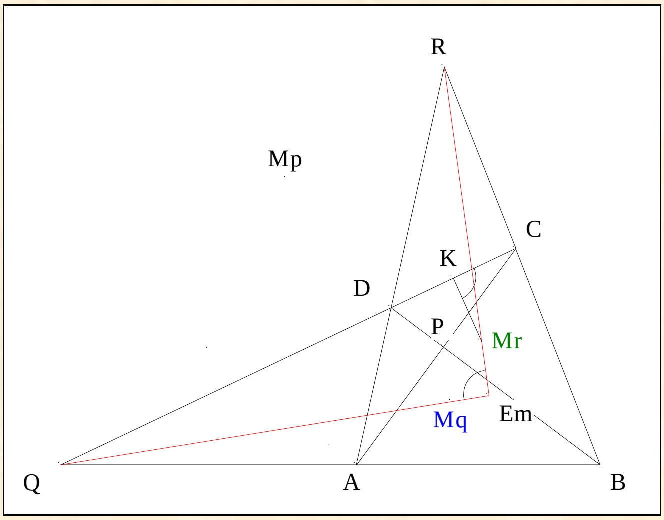


- **Conclusion :** les triangles PMqMr, MpQMr et MpMqR
  étant directement semblables, adjacents et intérieurs au triangle de Miquel MpMqMr,
  d'après **C. VII**
  (PMp), (QMq) et (RMr) concourent en Em
  i.e.
  le triangle diagonal PQR est en perspective de centre Em avec le triangle de Miquel MpMqMr.

7. L'angle <REmQ

VISION

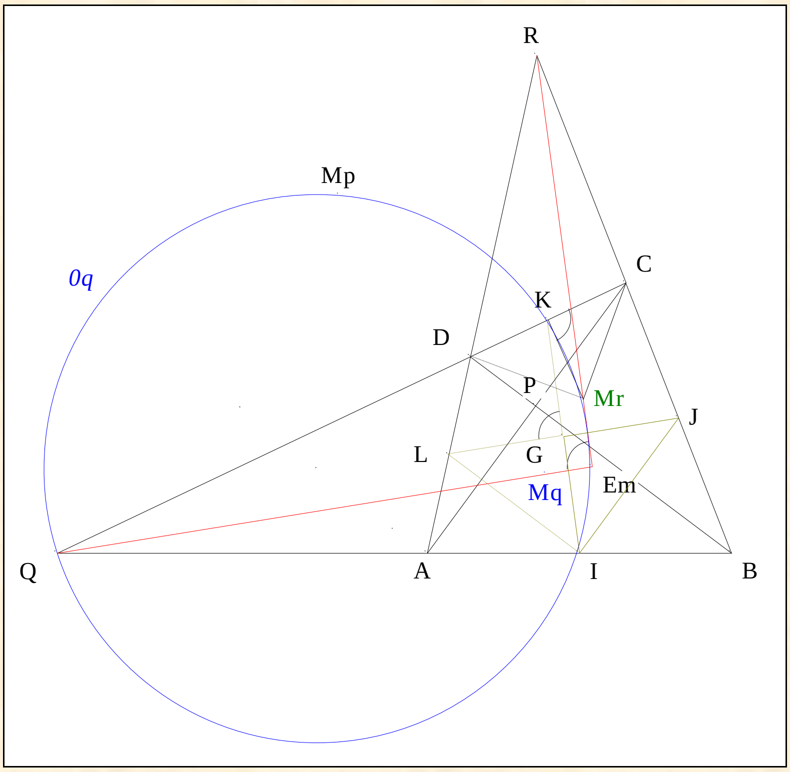
Figure :



Traits : les hypothèses et notations sont les mêmes que précédemment.

Donné : <REmQ = <MrKC.

VISUALISATION

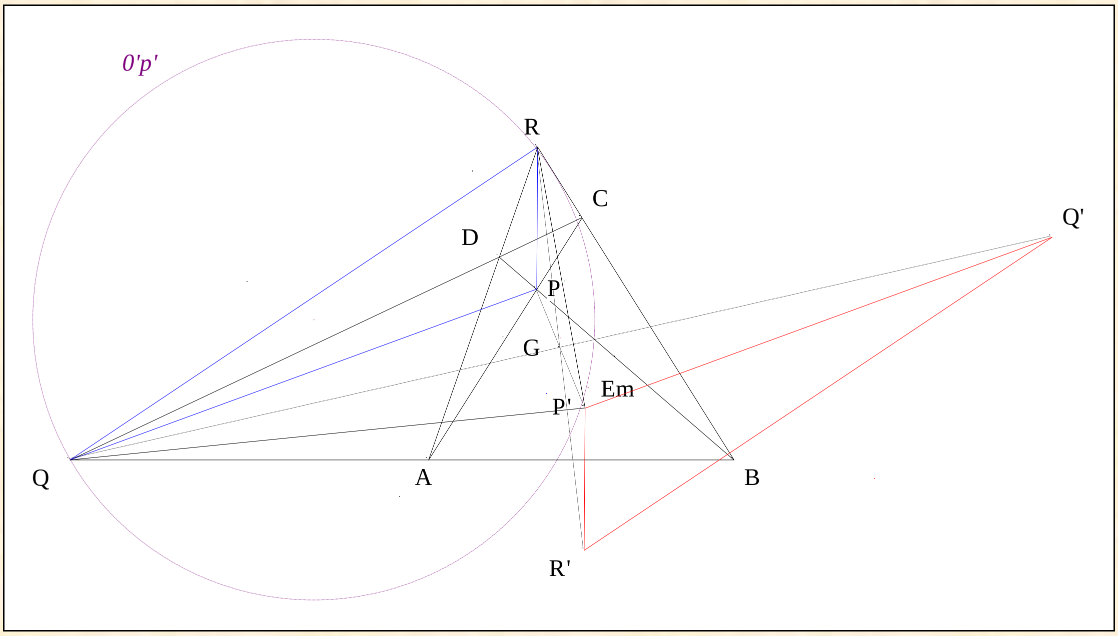


- Notons *0q* le Q-cercle de Brianchon-Poncelet de ABCD.
- *0q* étant le cercle circonscrit du quadrilatère QEuMrK, <REmQ = <MrKC.
- D'après **C. VI**, les triangles MrKC et IGJ étant semblables, <MrKC = <IGJ.
- **Conclusion :** par transitivité de =, <REmQ = <IGJ.

8. Le triangle G-symétrique de PQR et l'angle <RP'Q

VISION

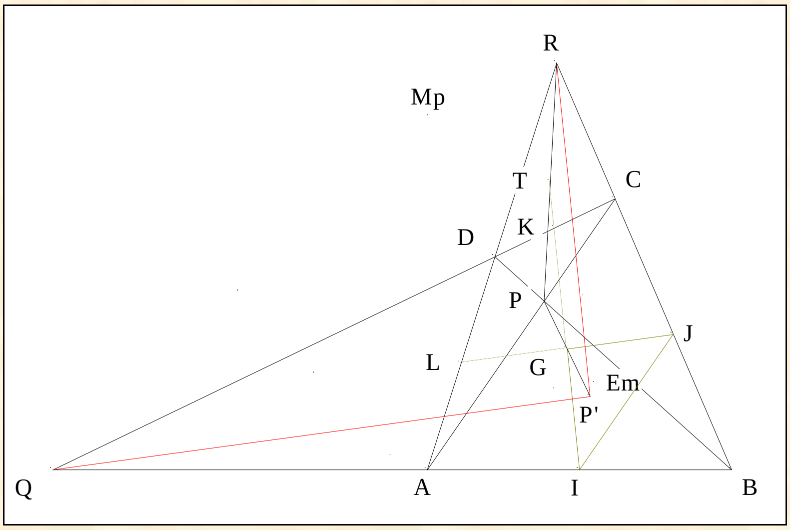
Figure :



Traits : aux hypothèses et notations précédentes, nous ajoutons
P'Q'R' le triangle G-symétrique de PQR
et *0'p'* le cercle circonscrit à P'QR

Donné : *0'p'* passe par Em.

VISUALISATION



- Notons T le point d'intersection de (IK) et (RP).
- D'après Karl Friedrich Gauss [38], (IGKT) est la gaussienne du quadrilatère PCRD.
- D'après Thalès "La droite des milieux" appliqué au triangle PP'R, (P'R) // (IK).

[38] Gauss K. F., *Monatscorrespond.* 22 (1810) 115.
Ayme J.-L., La droite de Gauss…, G.G.G. vol. **4**, p. 1-4 ; http://jl.ayme.pagesperso-urange.fr/
Ayme J.-L., La droite de Newton, une nouvelle preuve, G.G.G. vol. **1** ; http://jl.ayme.pagesperso-urange.fr/
Ayme J.-L., La droite de Newton, *Expressions* **22** (2003) 173-181
Ayme J.-L., Schéma **27**, Méthodes et Techniques en Géométrie à propos de la droite de Newton, Ellipses, Paris (2003)

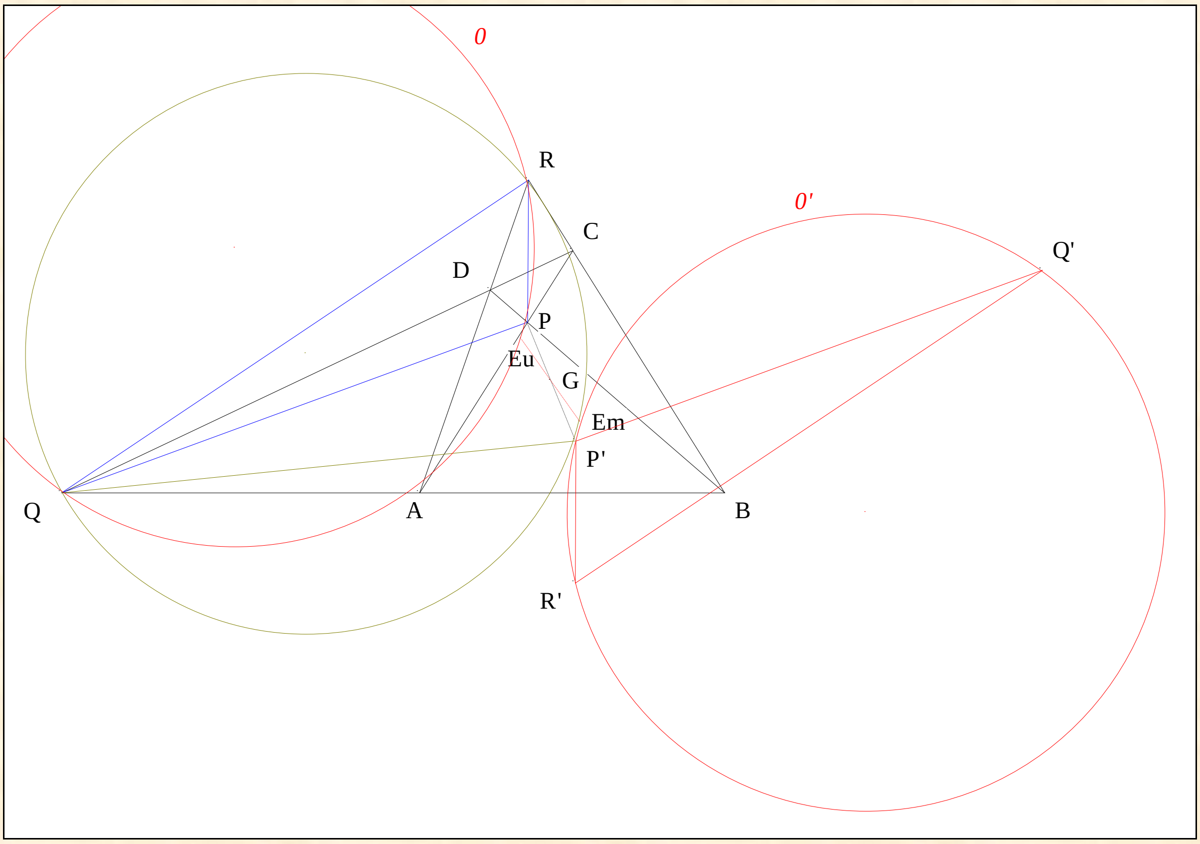
- Mutatis mutandis, nous montrerions que (P'Q) // (JL).
- **Conclusion partielle :** <IGJ = <RP'Q.
- D'après **B. 7.** L'angle <REmQ**,** <REmQ = <IGJ ;

  par transitivité de =, <REmQ = <RP'Q.
- **Conclusion :** *0'p'* passe par Em.
- Mutatis mutandis, nous montrerions que *0'q'* et *0'r'* passent par Em.

9. Le premier cercle de Brianchon-Poncelet

VISION

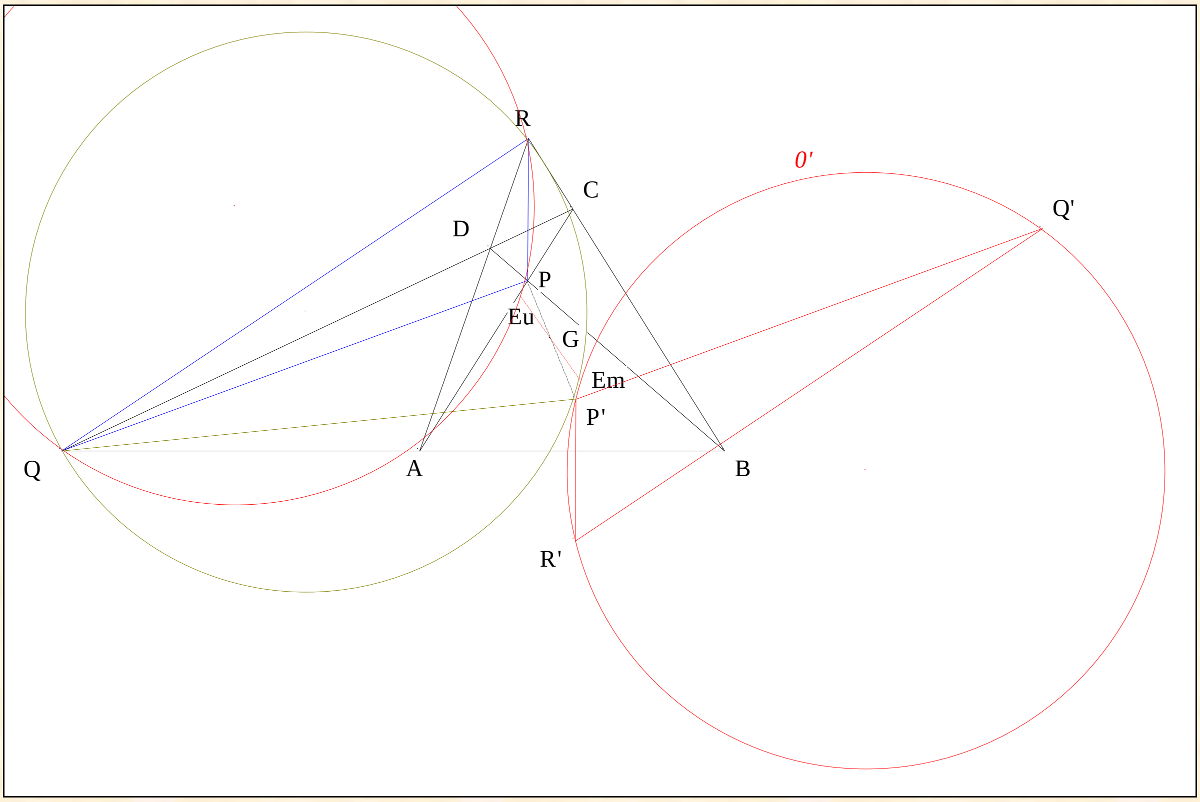
Figure :



Traits :	ABCD	un quadrilatère convexe,
	Eu	le point d'Euler-Poncelet de ABCD,
	PQR	le triangle diagonal de ABCD,
	0	le cercle circonscrit à PQR
et	*0'*	le cercle circonscrit à P'Q'R'.

Donné : *0* passe par Eu.

VISUALISATION



- D'après **C. VIII**, *0'p'*, *0'q'* et *0'r'* sont concourants sur *0'*.
- D'après **B. 8**, ce point de concours est Em.
- **Conclusion :** par symétrie de centre G, *0* passe par Eu.

Scolie : *0* est "le premier cercle de Brianchon-Poncelet de ABCD".

C. CULTURE GÉOMÉTRIQUE

I. LE POINT D'EULER

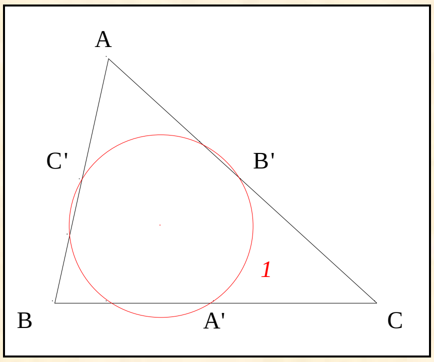
D'UN

QUADRILATÈRE

1. Le cercle d'Euler d'un triangle

VISION

Figure :



Définition : ABC un triangle
et A', B', C' les milieux resp. de [BC], [CA], [AB].

Finition : le cercle passant par A', B' et C' est "le cercle d'Euler de ABC".

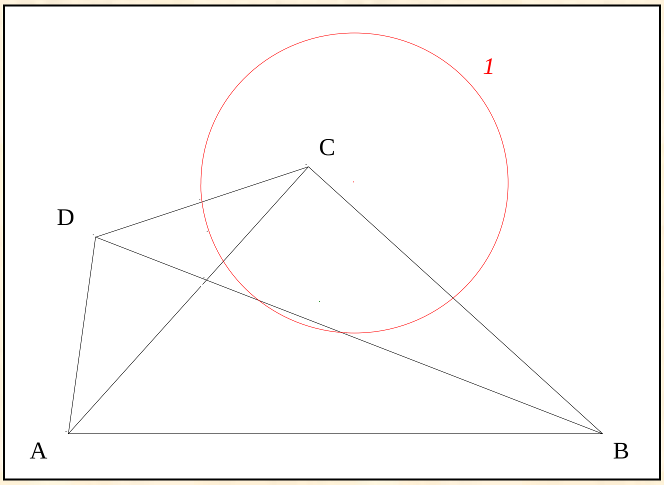
Une précision : d'après les recherches de l'historien anglais James Sturgeon MacKay, le cercle dit d'Euler n'apparaît nulle part dans l'oeuvre de celui-ci. Mackay [39] dans un article de 1892, intitulé *History of the Nine Point Circle*, attribue ce cercle à John Whitley [40]. Une autre source attribue ce cercle à l'ingénieur civil Benjamin Bevan [41].

2. Un cercle d'Euler d'un quadrilatère

VISION

Figure :

[39] MacKay J. S., *Plane Geometry* (1904)
[40] Whitley J., *Gentleman's Mathematical Companion* (1808) 133
[41] Bevan B., *Mathematical Repository* de Leybourn **I** (1804) 18



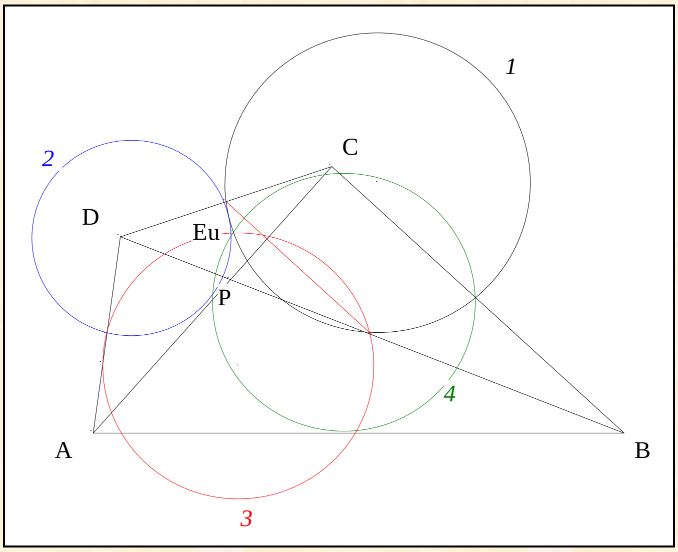
Finition : ABCD un quadrilatère convexe
et *1* le cercle d'Euler du triangle BCD.

Définition : *1* est "le A-cercle d'Euler de ABCD".

3. Le point d'Euler d'un quadrilatère

VISION

Figure :



Traits : ABCD un quadrilatère convexe
et *1, 2, 3, 4* les A, B, C, D-cercles d'Euler de ABCD.

Donné : *1*, *2*, *3* et *4* sont concourants.

Commentaire : une preuve synthétique de ce résultat peut être vue sur le site de l'auteur. [42]
cette preuve a été retenue par Alexander Bogomolny sur son site *Cut the Knot* [43].

[42] Ayme J.-L., Le point d'Euler-Poncelet d'un quadrilatère, G.G.G. vol. **8**, p. 3-6 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/
[43] Interactive Mathematics Miscellany and Puzzles, *Cut the Knot* ; http://www.cut-the-knot.org/m/Geometry/PonceletPoint.shtml

II. LE POINT MÉDIAN

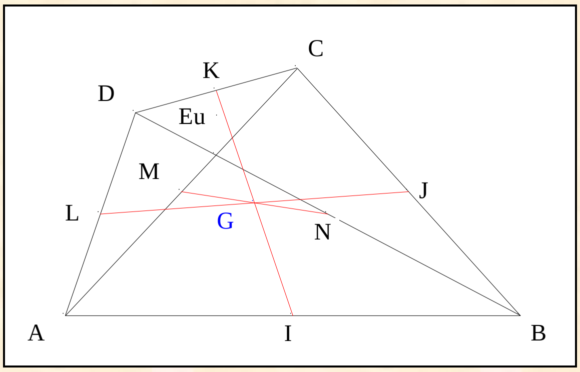
D'UN

QUADRILATÈRE

1. Le point médian

VISION

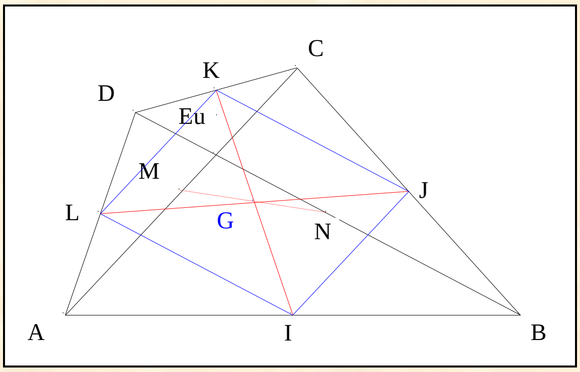
Figure :



Traits : ABCD un quadrilatère convexe
et I, J, K, L, M, N les milieux resp. de [AB],[BC],[CD],[DA],[AC], [BD].

Donné : [IK], [JL] et [MN] sont concourantes.

VISUALISATION

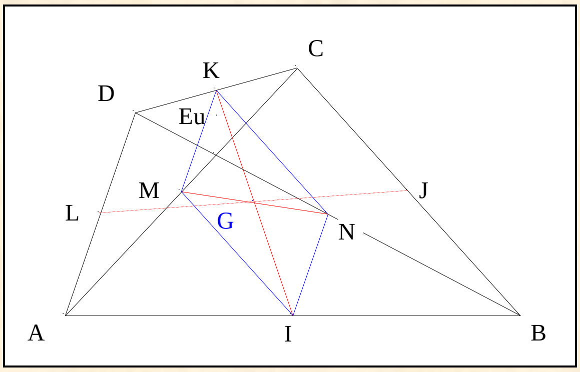


- D'après Varignon "Le parallélogramme" [44], le quadrilatère IJKL étant un parallélogramme,
  en conséquence, ses diagonales [IK] et [JL] se coupent en leur milieu.

- Notons G ce point milieu.

---

[44] Varignon P. (1654-1722), *Éléments de* mathématiques (1731) 62-63 ; publication posthume
Ayme J.-L., **8.** Quickie **2**, G.G.G. vol. **15** ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/



- D'après Varignon "Le parallélogramme", le quadrilatère INKM étant un parallélogramme, en conséquence, ses diagonales [IK] et [MN] se coupent en leur milieu i.e. en G.

- **Conclusion :** [IK], [JL] et [MN] sont concourantes en G.

Scolies : **(1)** G est "le point médian de ABCD"

(2) (IK) et (JL) sont "les deux bimédianes de ABCD".

III. LE POINT DE BENNETT

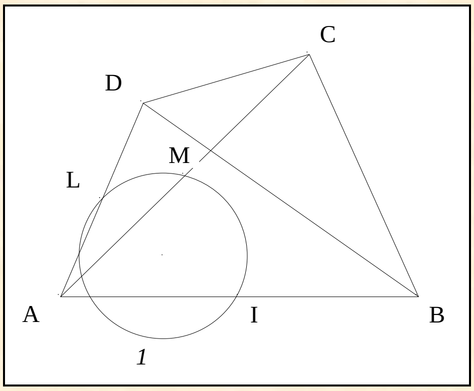
D'UN

QUADRILATÈRE

1. Le A-cercle de Bennett d'un quadrilatère

VISION

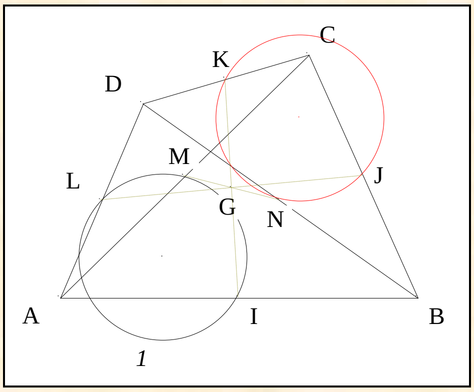
Figure :



Finition :	ABCD	un quadrilatère convexe,
	I, M, L	les milieux resp. de [AB], [AC], [AD]
et	*1*	le cercle passant par I, M, L.

Définition : *1* est "le A-cercle des milieux de ABCD".

Scolie : par rapport au point médian G de ABCD



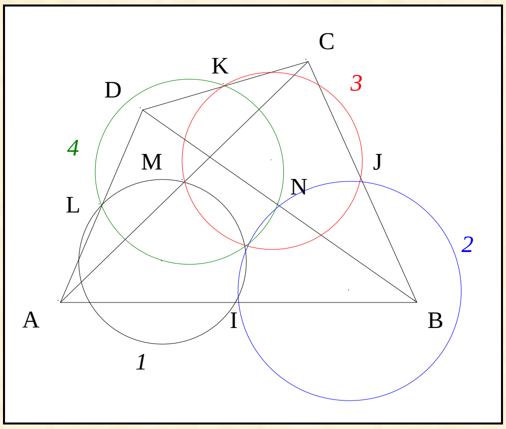
- Notons J, K, L, N les milieux resp. de [BC], [CD], [DA], [BD]
  et G le point médian de ABCD.

- **Conclusion :** le symétrique de A-cercle de Bennett par rapport à G est le A-cerle d'Euler de ABCD.

2. Le point de Bennett d'un quadrilatère convexe

VISION

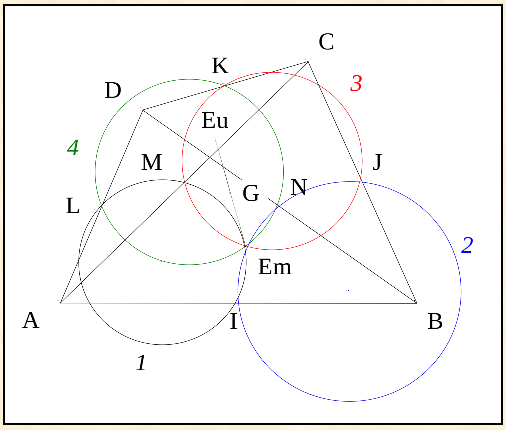
Figure :



Traits : ABCD un quadrilatère convexe,
I, J, K, L, M, N les milieux resp. de [AB], [BC], [CD], [DA], [AC], [BD]
et *1*, *2*, *3*, *4* les A, B, C, D-cercles de Bennett de ABCD.

Donné : *1*, *2*, *3* et *4* sont concourants [45].

VISUALISATION



- Notons Eu le point de concours des A, B, C, D-cercles d'Euler de ABCD
  et G le point médian de ABCD.
- **Conclusion :** d'après **C. III. 1**, *1*, *2*, *3* et *4* concourent au symétrique de Eu par rapport à G.
- Notons Em ce point de concours.

Scolie : le quadrilatère EuMEmN est un parallélogramme.

---

[45] Sharygin I. F., *Problemas de geometria*, Editions Mir, Moscou (1986), **II**. 210 p.112

IV. LES TROIS POINTS DE MIQUEL-WALLACE

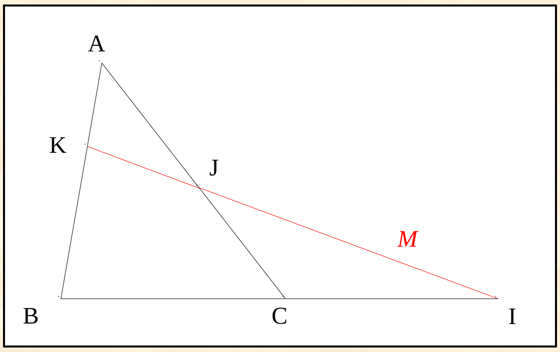
D'UN

QUADRILATÈRE

1. Un delta

VISION

Figure :



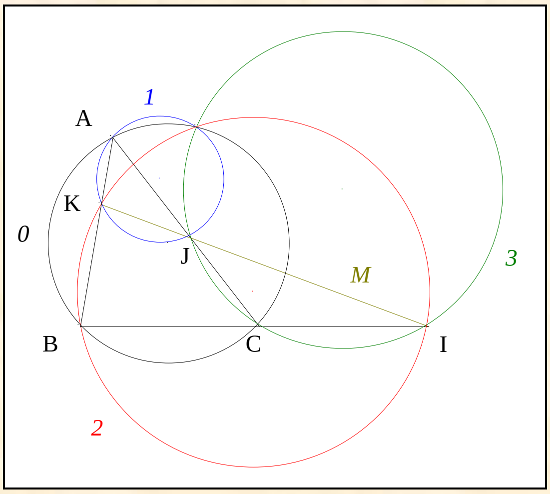
Finition : ABC un triangle
et *M* une ménélienne de ABC.

Définition : le couple (ABC, *M*) est un delta.

2. Le point de Miquel-Wallace d'un delta

VISION

Figure :



Traits : (ABC, *M*) un delta,
I, J, K les points d'intersection de *M* resp. avec (BC), (CA), (AB),
0 le cercle circonscrit à ABC
et *1*, *2*, *3* les cercles circonscrits resp. aux triangles AKJ, BIK, CJI.

Donné : *0*, *1*, *2* et *3* sont concourants.[46]

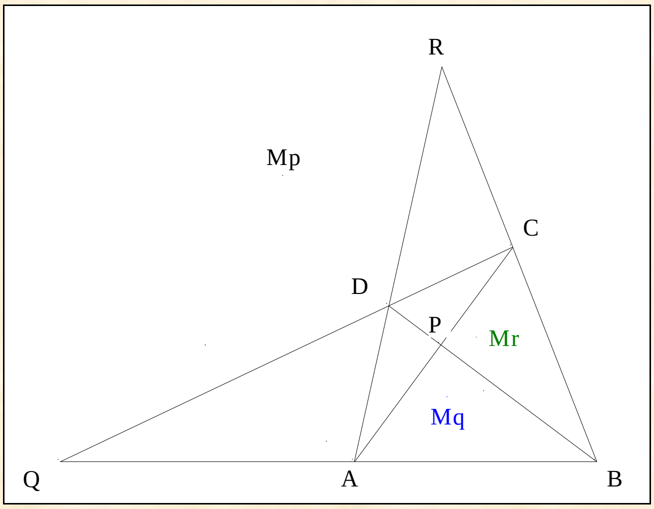
Commentaire : une preuve synthétique de ce résultat peut être vue sur le site de l'auteur.[47]

Scolie : ce point de concours est "le point de Miquel de (ABC, *M*)".

2. Les trois points de Miquel-Wallace d'un quadrilatère

VISION

Figure :



Finition : ABCD un quadrilatère convexe,
P, Q, R les points d'intersection resp. de (AC) et (BD), (AB) et (CD), (AD) et (BC),
Mp, Mq, Mr les points de Miquel resp.
des deltas [RAB, (QDC)], [QBC, (RDA)], [PCD, (QAB)]

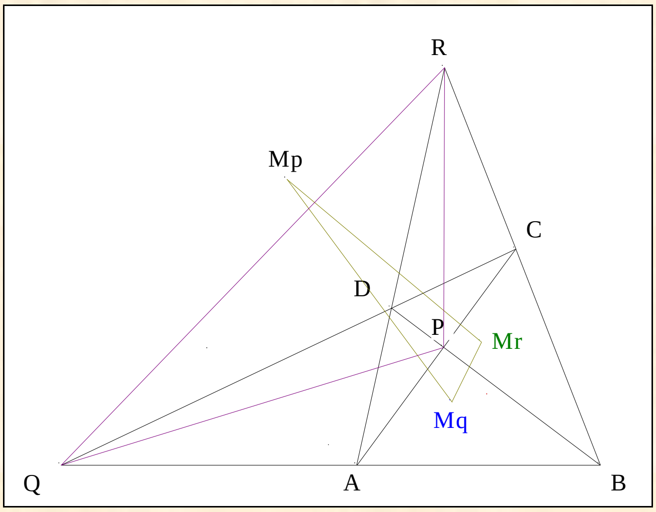
Définition : Mp, Mq et Mr sont les trois points de Miquel-Wallace de ABCD.

Scolies :

---

[46] Wallace W., Leybourn's *Mathematical Repository*, vol. **1**, part **I** (1804) 170

[47] Ayme J.-L., Auguste Miquel, G.G.G. vol. **13**, p. 12-14 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/



(1) PQR est "le triangle diagonal de ABCD"

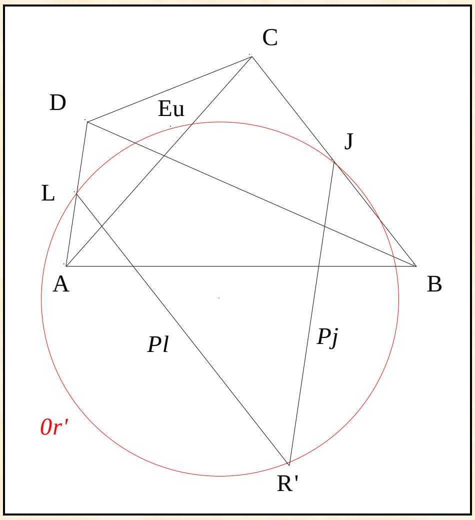
(2) MpMqMr est "le triangle de Miquel de ABCD".

V. LES SECONDS CERCLES

DE

BRIANCHON - PONCELET

VISION



Traits : ABCD un quadrilatère convexe,
Eu le point d'Euler-Poncelet de ABCD,
J, L les milieux resp. de [BC], [AD],
Pj, *Pl* les parallèles à (AD), (BC) issues resp. de J, L,
R' le point d'intersection de *Pj* et *Pl*,
et *0r'* le cercle passant par X', J et L.

Donné : *0r'* passe par Eu. [48]

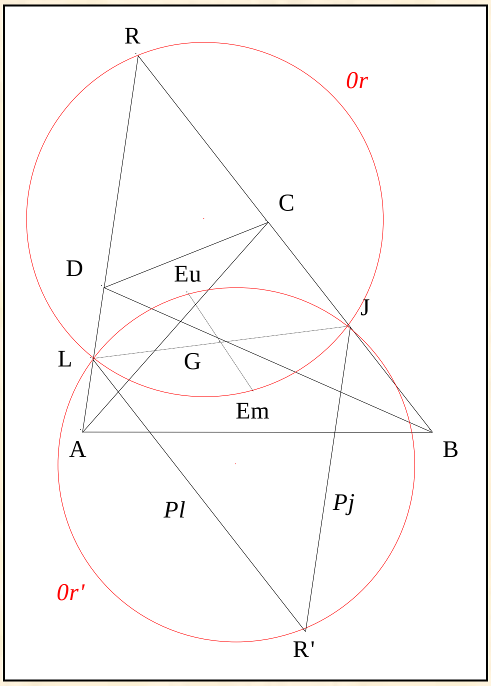
Commentaire : une preuve synthétique de ce résultat peut être vue sur le site de l'auteur. [49]

Scolies : **(1)** *0r'* est "le R'-cercle de Brianchon-Poncelet de ABCD"

(2) le cercle des milieux *0r*

[48] Brianchon C. J., Poncelet J.-V., Recherche sur la détermination d'une hyperbole équilatère au moyen de quatre conditions données, *Annales Mathématiques* de Montpellier vol. **XI** (01/01/1821) 504-516 ; théorème **VII**, p. 511

[49] Ayme J.-L., Le point d'Euler-Poncelet d'un quadrilatère, G.G.G. vol. **8**, p. 81-85 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/



- Notons G le point médian de ABCD,
  Em le point de Bennett de ABCD
  et *0r* le R-cercle des milieux de ABCD.

- **Conclusion :** par symétrie de centre G, *0r* passe par Em.

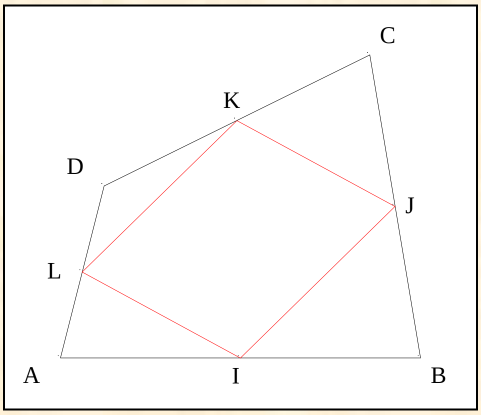
Scolie : *0r* est "le R-cercle de Brianchon-Poncelet de ABCD".

VI. DEUX TRIANGLES SEMBLABLES

1. Le parallélogramme de Varignon

VISION

Figure :



Traits : ABCD un quadrilatère convexe
et I, J, K, L les milieux resp. de [AB], [BC], [CD], [DA].

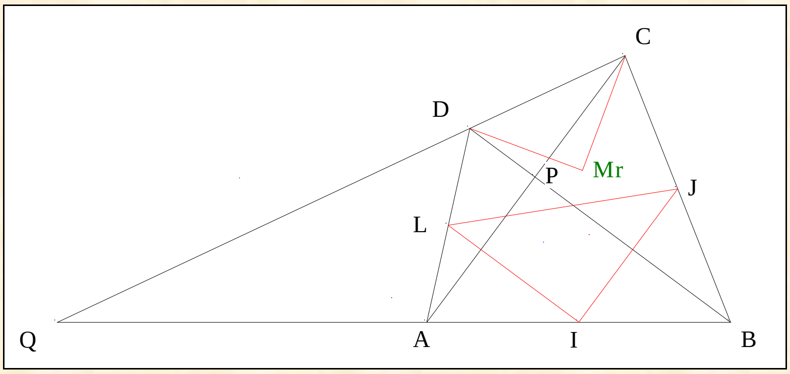
Donné : le quadrilatère IJKL est un parallélogramme. [50]

Commentaire : une preuve synthétique de ce résultat peut être vue sur le site de l'auteur. [51]

2. Deux triangles semblables

VISION

Figure :

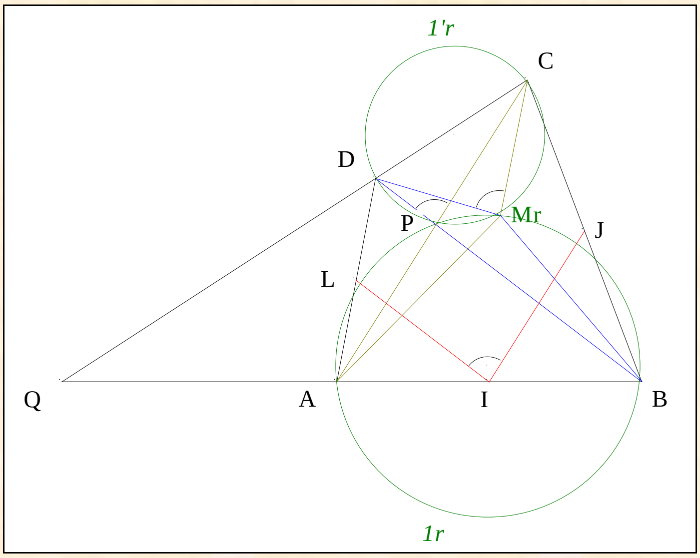


[50] Varignon P. (1654-1722), *Éléments de* mathématiques (1731) 62-63 ; publication posthume
[51] Ayme J.-L., **8** Quickies **2**, Le parallélogramme de Varignon, G.G.G. vol. **15**, p. 6 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/

Traits : ABCD un quadrilatère convexe,
P le point d'intersection de (AC) et (BD),
Mr le point de Miquel du delta [PCD, (QAB)]
et I, J, L les milieux resp. de [AB], [BC], [AD].

Donné : les triangles MrCD et IJK sont semblables. [52]

VISUALISATION



- Notons *1r*, *1'r* les cercles circonscrits resp. aux triangles PAB, PCD.

- Par définition de Mr, *1r* et *1'r* passent par Mr.

- Une première chasse angulaire :

  * par "Angles inscrits", <CMrD = <CPD

  * par "Angles à côtés parallèles", <CPD = <JIL

  * par transitivité de =, <CMrD = <JIL.

- Une seconde chasse angulaire :

  * par "Angles de deux cercles" [53], <CMrA = <DMrB

  * par une autre écriture, <ACMr = <PCMr

  * par "Angles inscrits", <PCMr = <PDMr

  * par une autre écriture, <PDMr = BDMr

  * par transitivité de =, <ACMr = <BDMr

  * mutatis mutandis, <MrAC = <MrBD.

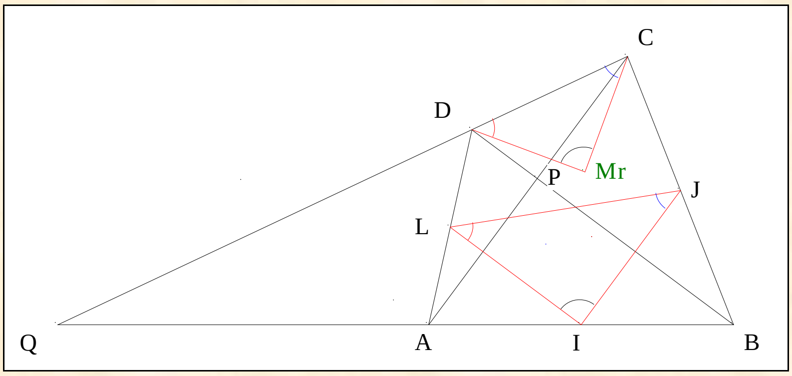
---

52 Two similar triangles, AoPS du 11/07/2017 ;
https://artofproblemsolving.com/community/c6h1476298_two_similar_triangle

53 Baltzer R. dans son livre *Statik* attribue ce résultat à A. F. Möbius (1790-26/09/1868)
Ayme J.-L., Un triangle curviligne, G.G.G. vol. **23**, p. 2-3 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange

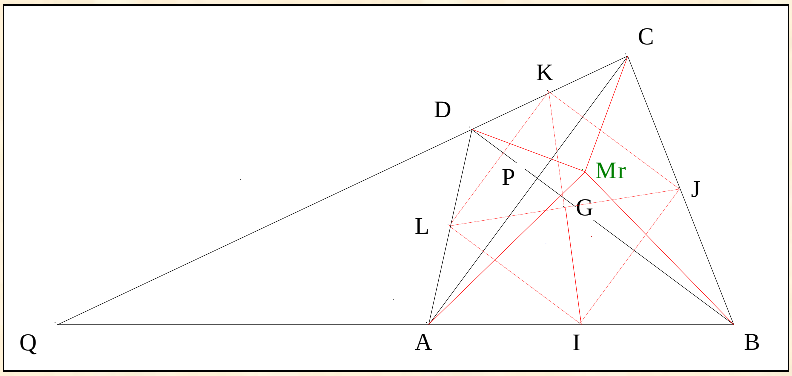
- Les triangles MrAC et MrBD étant semblables, MrC/MrD = AC/BD

- D'après Thalès "La droite des milieux"
  appliqué resp. aux triangles ABC, ABD AC/BD = IJ/IL ;
  par transitivité de =, MrC/MrD = IJ/IL.



- **Conclusion :** MrCD est semblable à IJK.

Scolies : **(1)** trois triangles semblables

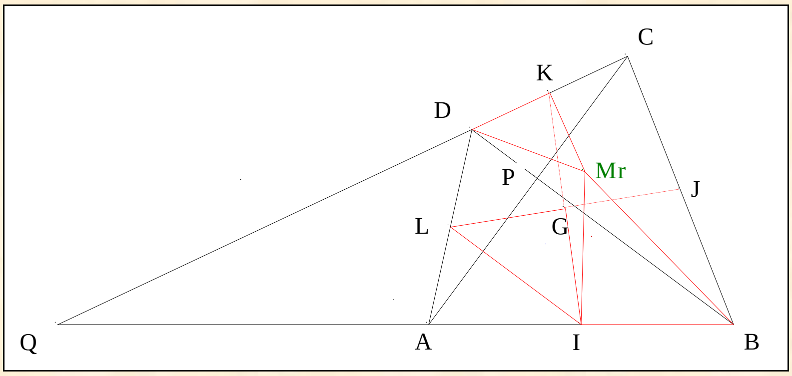


- Notons K le milieu de [CD]
  et G le point médian de ABCD.

- IJKL étant un parallélogramme, IJL est semblable à KLJ.

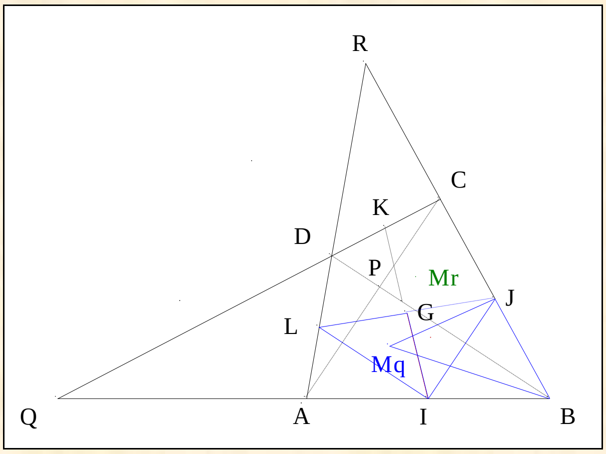
- Mutatis mutandis, nous montrerions que KLJ est semblable à MrAB

- Par transitivité de "est semblable à", MrCD est semblable à MrAB.



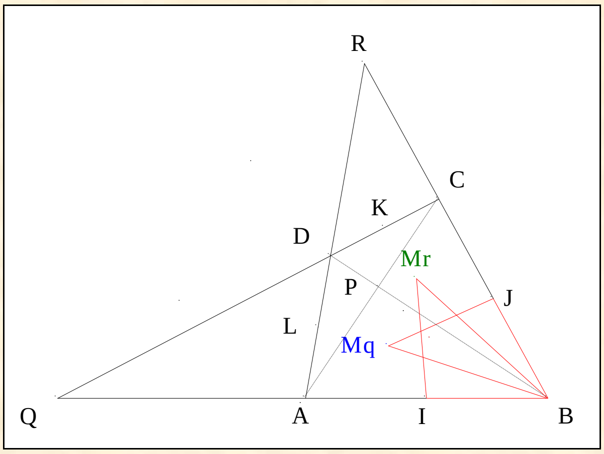
- **Conclusion :** MrKD, MrIB et IGL sont semblables entre eux.

(2) Deux angles égaux



- Notons R le point d'intersection de (AD) et (BC),
  et Mq le point de Miquel du delta [QBC, (RDA)].

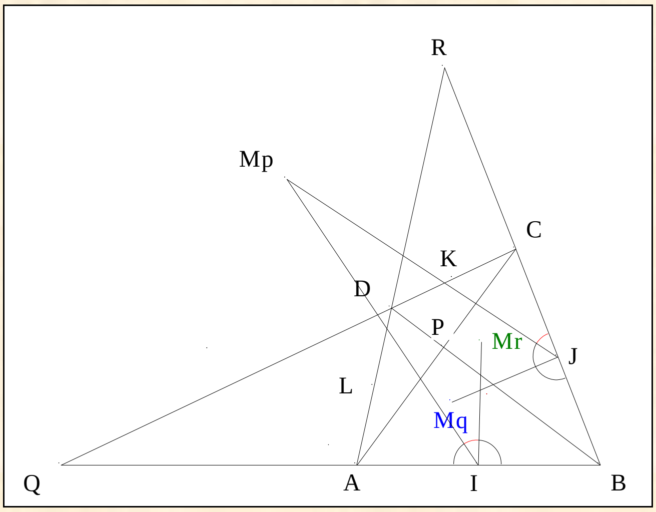
- Mutatis mutandis, nous montrerions que les triangles BJMq, LDMq et IGL sont semblables.



- En conséquence, les triangles BJMq et MrIB sont semblables.

- **Conclusion :** <MqJB = <BIMr.

(3) Deux autres égalités angulaires.

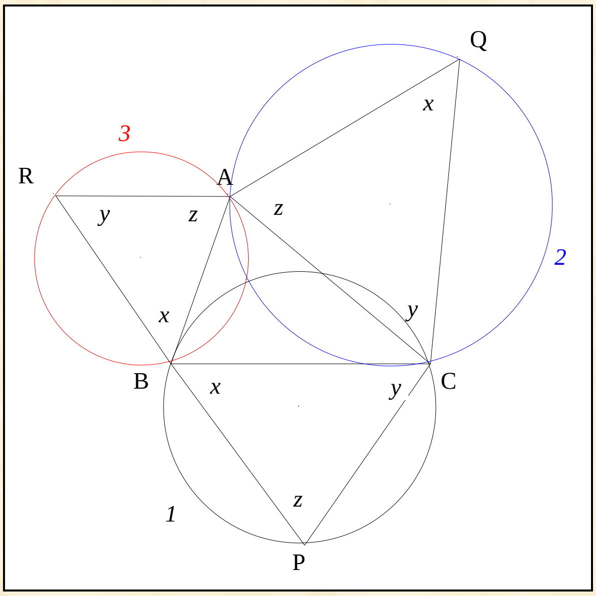


- Par permutation circulaire, nous montrerions que <MrJB = <BIMr.

VII. LE POINT DE JOHN HORTON CONWAY

VISION

Figure :



Traits :	ABC	un triangle,
	BCP	un triangle extérieur à ABC,
	BAR	le triangle semblable à BPC, extérieur à ABC,
	CAQ	le triangle semblable à CPB, extérieur à ABC
et	*1*, *2*, *3*	les cercles circonscrits à BCP, CAQ, ABR.

Donné : *1*, *2* et *3* sont concourants. [54]

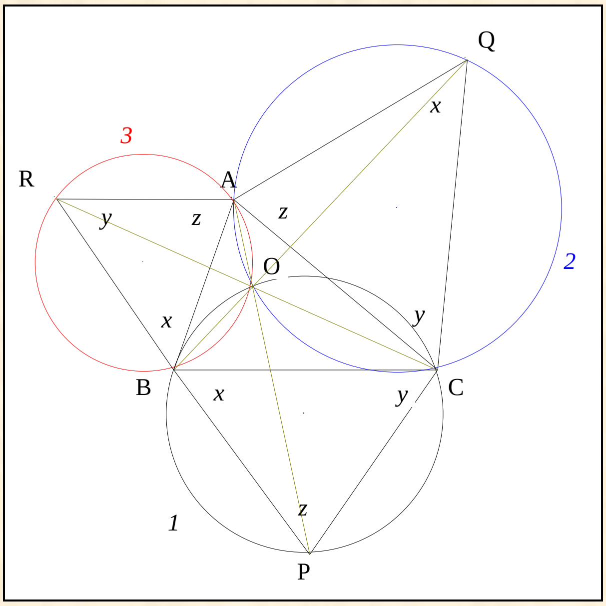
Commentaire : une preuve synthétique de ce résultat peut être vue sur le site de l'auteur. [55]

Scolies : **(1)** ce point de concours est "le point de Conway de ABC relativement à *1*, *2*, *3*"

(2) Un résultat

[54] Conway J. H.

[55] Ayme J.-L., Deux triangles semblables, G.G.G. vol. **16**, p. 24-26 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/



- **Conclusion :** (PA), (QB) et (RC) sont concourantes en O.

(3) Le résultat reste vrai lorsque l'on remplace "extérieur" par "intérieur".

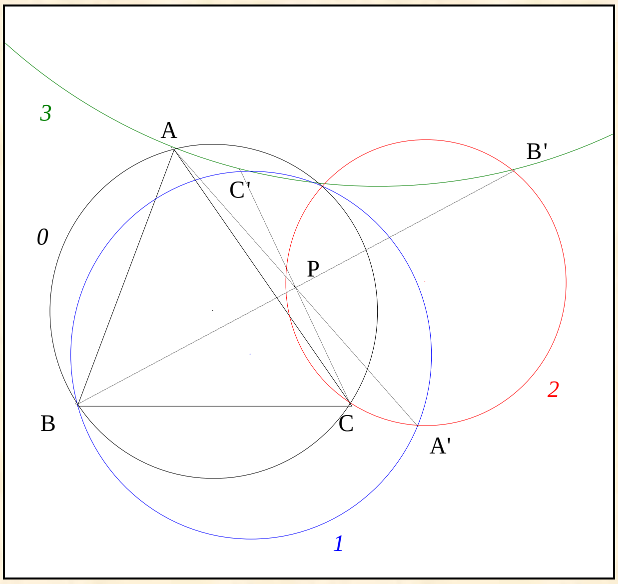
VIII. QUATRE CERCLES CONCOURANTS

DE

FLOOR VAN LAMOEN

VISION

Figure :

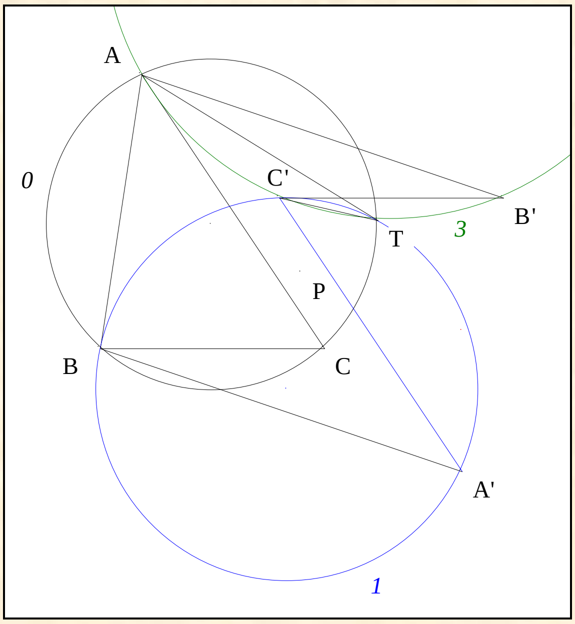


Traits :		ABC	un triangle,
		P	un point,
		A', B', C'	les symétriques de A, B, C par rapport à P
	et	*0*, *1*, *2*, *3*	les cercles circonscrits resp. aux triangles ABC, AB'C', A'BC', A'B'C.

Donné : *0*, *1*, *2* et *3* sont concourants. [56]

VISUALISATION

[56] van Lamoen F., Another conjecture (?), Message *Hyacinthos* # **4547** du 13/12/2001 ; http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/



- Notons T le second point d'intersection de *0* et *1*.

- Le quadrilatère ACA'C'
  ayant ses diagonales se coupant en leur milieu P, est un parallélogramme ; en conséquence, (AC) // (A'C').

- Le quadrilatère ABA'B'
  ayant ses diagonales se coupant en leur milieu P, est un parallélogramme ; en conséquence, (AB') // (BA').

- Le quadrilatère BCB'C'
  ayant ses diagonales se coupant en leur milieu P, est un parallélogramme ; en conséquence, (B'C') // (BC).

- Les cercles *0* et *1*, les points de base B et T, les parallèles (AC) et (A'C'),
  conduisent au théorème généralisé de Reim [57] ; en conséquence, <ATC' = <CBA' ;
  d'après le théorème "Angles à côtés parallèles", <CBA' = <C'B'A ;
  par transitivité de la relation =, <ATC' = <C'B'A ;
  en conséquence, A', C', T et B' sont cocycliques i.e. *3* passe par T.

- Mutatis mutandis, nous montrerions que *2* passe par T.

- **Conclusion :** *0*, *1*, *2* et *3* sont concourants.

Note historique : ce résultat de 2001, a été déjà étudié par S. N. Collings [58] en 1974. Les coordonnées barycentriques du point de concours ont été calculées par Barry Volk.
La transformation qui a un point P associe ce point de concours, est dite de "Collings" chez ETC [59].
Rappelons que Jakob Steiner avait envisagé cette situation lorsque P est le point médian de ABC ; les quatre cercles concourent au point de Steiner qui, dans la nomenclature d'ETC, est répertorié sous X_{99}.

---

57 Ayme J.-L., Deux cercles sécants, G.G.G. vol. **12**, p. 9-11 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/
58 Collings S. N., Reflections on reflections **2**, *Mathematical Gazette* (1974) 264
59 Kimberling C., *Encyclopedia of Triangle Centers* ; http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html

LEXIQUE

FRANÇAIS - ANGLAIS

A	
aligné	collinear
annexe	annex
axiome	axiom
appendice	appendix
adjoint	associate
a propos	by the way btw
acutangle	acute angle
axiome	axiom
B	
bissectrice	bisector
bande	strip
C	
centre	incenter
centre du cercle circonscrit	circumcenter
cercle circonscrit	circumcircle
cévienne	cevian
colinéaire	collinear
concourance	concurrence
coincide	coincide
confondu	coincident
côté	side
par conséquence	consequently
commentaire	comment
D	
d'après	according to
donc	therefore
droite	line
d'où	hence
distinct de	different from
E	
extérieur	external
F	
figure	figure
H	
hauteur	altitude
hypothèse	hypothesis
I	
intérieur	internal
identique	identical
i.e.	namely
incidence	incidence
L	
lemme	lemma
lisibilité	legibility
M	
mediane	median
médiatrice	perpendicular bissector
milieu	midpoint

N	
Notons	name
nécessaire	necessary
note historique	historic note
O	
orthocentre	orthocenter
ou encore	otherwise
P	
parallèle	parallel
parallèles entre elles	parallel to each other
parallélogramme	parallelogram
pédal	pedal
perpendiculaire	perpendicular
pied	foot
point de vue	point of view
postulat	postulate
point	point
pour tout	for any
Q	
quadrilatère	quadrilateral
R	
remerciements	thanks
reconnaissance	acknowledgement
respectivement	respectively
rapport	ratio
répertorier	to index
S	
semblable	similar
sens	clockwise in this
order	
segment	segment
Sommaire	summary
symédiane	symmedian
suffisante	sufficient
sommet (s)	vertex (vertice)
T	
trapèze	trapezium
tel que	such as
théorème	theorem
triangle	triangle
triangle de contact	contact triangle
triangle rectangle	right-angle triangle