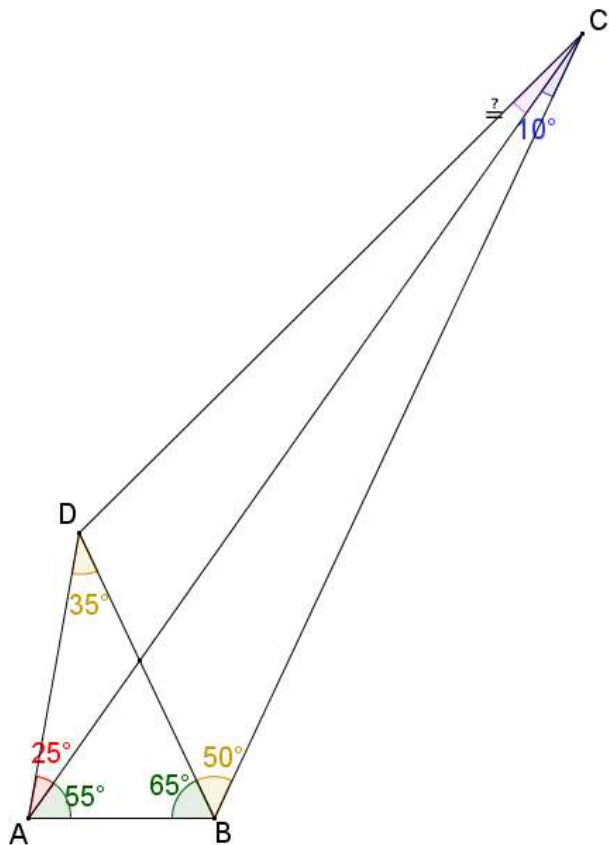


Problema n°846

Propuesto por Stan Fulger.

Sea un triángulo ACD. Tomemos un punto B exterior al mismo. Tenemos que: $\angle ACB = 10^\circ$, $\angle BAC = 55^\circ$, $\angle CBD = 50^\circ$, $\angle CAD = 25^\circ$. Hallar $\angle ACD$
Fulger, S. (2017): Comunicación personal.

Solution proposée par Philippe Fondanaiche



On désigne par α l'angle $\angle ACD$ qu'il s'agit de déterminer.

Réponse : $\alpha = 10^\circ$

A partir des angles $\angle ACB = 10^\circ$, $\angle BAC = 55^\circ$, $\angle CBD = 50^\circ$ et $\angle CAD = 25^\circ$, on déduit l'angle $\angle ABC = 180^\circ - \angle BAC - \angle ACB = 115^\circ$. D'où $\angle ABD = 115^\circ - \angle CAD = 65^\circ$.

Par ailleurs on a $\angle BAD = \angle BAC + \angle CAD = 80^\circ$

La loi des sinus dans le triangle ABC donne la relation $AD/BD = \sin(65^\circ) / \sin(80^\circ)$.

Cette même loi dans le triangle CAD donne la relation $CD/AD = \sin(25^\circ)/\sin(\alpha)$ et dans le triangle CBD la relation $CD/BD = \sin(50^\circ)/\sin(\alpha + 10^\circ)$.

Il en résulte que $CD = AD \cdot \sin(25^\circ)/\sin(\alpha) = BD \cdot \sin(50^\circ)/\sin(\alpha + 10^\circ)$.

D'où l'équation $\sin(25^\circ) \cdot \sin(65^\circ) \cdot \sin(\alpha + 10^\circ) = \sin(50^\circ) \cdot \sin(80^\circ) \cdot \sin(\alpha)$

Or $\sin(25^\circ) \cdot \sin(65^\circ) = \cos(65^\circ - 25^\circ)/2 = \cos(40^\circ)/2$ et $\sin(80^\circ) = 2\sin(40^\circ) \cdot \cos(40^\circ)$.

On est ramené à l'équation $\sin(\alpha + 10^\circ) = 4\sin(\alpha) \cdot \sin(40^\circ) \cdot \sin(50^\circ) = 2\sin(\alpha) \cdot \cos(10^\circ)$

c'est à dire: $\sin(\alpha + 10^\circ) = \sin(\alpha) \cdot \cos(10^\circ) + \cos(\alpha) \cdot \sin(10^\circ) = 2\sin(\alpha) \cdot \cos(10^\circ)$ qui entraîne $\tan(\alpha) = \tan(10^\circ)$ avec comme unique solution $\alpha = 10^\circ$