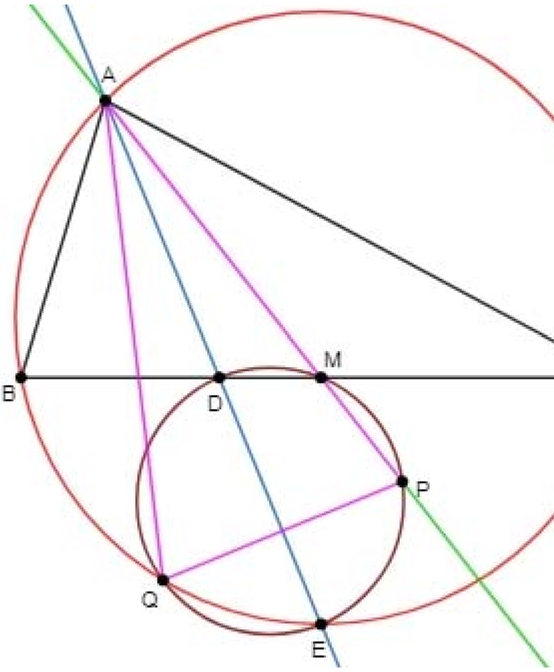
TRIÁNGULOS CABRI

Problema 855. (propuesto por Philippe Fondanaiche) Dado un triángulo ABC tal que $AB \neq AC$, se consideran el punto medio M del segmento BC, el pie D de la bisectriz interior correspondiente al vértice A y el segundo punto de intersección E entre dicha bisectriz y la circunferencia circunscrita al triángulo. A continuación, se consideran el segundo punto P de intersección entre la circunferencia circunscrita al triángulo DEM y la mediana AM y el segundo punto Q de intersección entre las circunferencias circunscritas a los triángulos DEM y ABC. Probar que el triángulo APQ es isósceles.



Solución:

Considerando coordenadas baricéntricas con respecto al triángulo ABC, resulta que:

$$\begin{cases} M = (0:1:1) \\ D = (0:b:c) \end{cases}$$

y como la ecuación de su circunferencia circunscrita es:

$$c^2xy + b^2xz + a^2yz = 0$$

al ser la ecuación de la bisectriz interior correspondiente al vértice A:

$$by - cz = 0$$

resolviendo el sistema formado por ambas ecuaciones, obtenemos que:

$$E = (-a^2 : b(b+c) : c(b+c))$$

siendo la ecuación de la circunferencia circunscrita al triángulo DEM:

$$c^2xy + b^2xz + a^2yz - \left[bcx + \left(\frac{a^2c}{2(b+c)}\right)y + \left(\frac{a^2b}{2(b+c)}\right)z\right](x+y+z) = 0$$

Miguel-Ángel Pérez García Ortega

por lo que, al ser la ecuación de la mediana correspondiente al vértice A:

$$y - z = 0$$

se verifica que:

$$\begin{cases} P = \left(2(b-c)^2 - a^2 : 2bc : 2bc\right) \\ Q = \left(-a^2 : 2b^2 : 2c^2\right) \end{cases}$$

Finalmente, como:

$$AP^2 = \frac{4b^2c^2}{-a^2 + 2b^2 + 2c^2} = AQ^2 \Rightarrow AP = AQ$$

entonces, el triángulo APQ es isósceles.