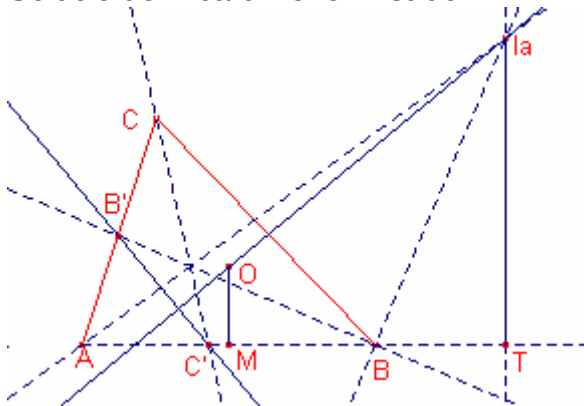


Problema 847

Siguen $\overline{AA'}$, A' , B' , C' les bisectrius interiors del triangle $\triangle ABC$.
 Demostreu que $B'C'$ és perpendicular a OI_a , essent O el circumcentre i I_a l'excentre del vèrtex A .

Solució de Ricard Peiró i Estruch:



Siga M el punt mig del costat $\overline{AB}$.

Siga T la projecció de I_a sobre el costat $\overline{AB}$ (punt de tangència de la circumferència exinscrita).

$$\overline{AT} = \frac{a+b+c}{2}.$$

$$\angle AOB = 2C. \quad \overline{OM} = \frac{c}{2\operatorname{tg}C}.$$

$$\overline{I_aT} = \frac{a+b+c}{2} \operatorname{tg} \frac{A}{2}.$$

Considerem $A(0, 0)$.

Les coordenades de O són $O\left(\frac{c}{2}, \frac{c}{2\operatorname{tg}C}\right)$.

Les coordenades de I_a són $I_a\left(\frac{a+b+c}{2}, \frac{a+b+c}{2} \operatorname{tg} \frac{A}{2}\right)$.

$$\overrightarrow{OI_a} = \left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b+c}{2} \operatorname{tg} \frac{A}{2} - \frac{c}{2\operatorname{tg}C}\right).$$

Aplicant la propietat de la bisectriu:

$$\overline{AC'} = \frac{bc}{a+b}, \quad \overline{AB'} = \frac{bc}{a+c}.$$

Les coordenades de C' són $C'\left(\frac{bc}{a+b}, 0\right)$.

Les coordenades de B' són $B'\left(\frac{bc}{a+c} \cos A, \frac{bc}{a+c} \sin A\right)$.

$$\overline{C'B'} = bc \left(\frac{\cos A}{a+c} - \frac{1}{a+b}, \frac{\sin A}{a+c} \right).$$

Vegem que els vectors $\overrightarrow{OI_a}$, $\overrightarrow{C'B'}$ són ortogonals:

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{\cos A}{a+c} - \frac{1}{a+b}, \frac{\sin A}{a+c} \right) \left(a+b, (a+b+c) \operatorname{tg} \frac{A}{2} - \frac{c}{\operatorname{tg} C} \right) = \\
 & = \frac{a+b}{a+c} \cos A - 1 + \frac{a+b+c}{a+c} \sin A \cdot \operatorname{tg} \frac{A}{2} - \frac{c \cdot \sin A}{(a+c) \operatorname{tg} C} = \\
 & = \frac{a+b}{a+c} \cos A - 1 + \frac{a+b+c}{a+c} 2 \sin^2 \frac{A}{2} - \frac{a \cdot \cos C}{a+c} = \\
 & = \frac{a+b}{a+c} \cos A - 1 + \frac{a+b+c}{a+c} (1 - \cos A) - \frac{a \cdot \cos C}{a+c} = \\
 & = \frac{-c \cdot \cos A}{a+c} + \frac{-a \cdot \cos C}{a+c} - 1 + \frac{a+b+c}{a+c} = \\
 & = \frac{1}{a+c} \frac{a^2 - b^2 - c^2}{2b} + \frac{1}{a+c} \frac{c^2 - a^2 - b^2}{2b} + \frac{b}{a+c} = 0
 \end{aligned}$$

Per tant, $B'C'$ i OI_a són perpendiculars.