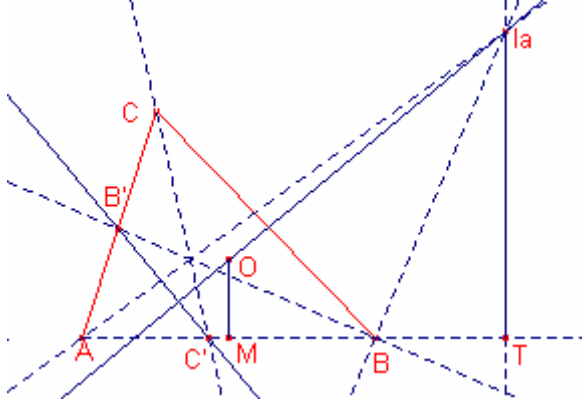


Problema 847

Sean $\overline{AA'}$, A' , B' , C' las bisectrices interiores del triángulo $\triangle ABC$. Demostrar que $B'C'$ es perpendicular a OI_a , siendo O el circuncentro y I_a el excentro del vértice A .

Solución de Ricard Peiró i Estruch:



Sea M el punto medio del lado $\overline{AB}$.

Sea T la proyección de I_a sobre el lado $\overline{AB}$ (punto de tangencia de la circunferencia exinscrita).

$$\overline{AT} = \frac{a+b+c}{2}.$$

$$\angle AOB = 2C. \quad \overline{OM} = \frac{c}{2\operatorname{tg} C}.$$

$$\overline{I_a T} = \frac{a+b+c}{2} \operatorname{tg} \frac{A}{2}.$$

Consideremos $A(0, 0)$.

Las coordenadas de O son $O\left(\frac{c}{2}, \frac{c}{2\operatorname{tg} C}\right)$.

Las coordenadas de I_a son $I_a\left(\frac{a+b+c}{2}, \frac{a+b+c}{2} \operatorname{tg} \frac{A}{2}\right)$.

$$\overrightarrow{OI_a} = \left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b+c}{2} \operatorname{tg} \frac{A}{2} - \frac{c}{2\operatorname{tg} C}\right).$$

Aplicando la propiedad de la bisectriz:

$$\overline{AC'} = \frac{bc}{a+b}, \quad \overline{AB'} = \frac{bc}{a+c}.$$

Las coordenadas de C' son $C'\left(\frac{bc}{a+b}, 0\right)$.

Las coordenadas de B' son $B'\left(\frac{bc}{a+c} \cos A, \frac{bc}{a+c} \sin A\right)$.

$$\overline{C'B'} = bc \left(\frac{\cos A}{a+c} - \frac{1}{a+b}, \frac{\sin A}{a+c}\right).$$

Veamos que los vectores $\overrightarrow{OI_a}$, $\overrightarrow{C'B'}$ son ortogonales:

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{\cos A}{a+c} - \frac{1}{a+b}, \frac{\sin A}{a+c} \right) \left(a+b, (a+b+c) \operatorname{tg} \frac{A}{2} - \frac{c}{\operatorname{tg} C} \right) = \\
 & = \frac{a+b}{a+c} \cos A - 1 + \frac{a+b+c}{a+c} \sin A \cdot \operatorname{tg} \frac{A}{2} - \frac{c \cdot \sin A}{(a+c) \operatorname{tg} C} = \\
 & = \frac{a+b}{a+c} \cos A - 1 + \frac{a+b+c}{a+c} 2 \sin^2 \frac{A}{2} - \frac{a \cdot \cos C}{a+c} = \\
 & = \frac{a+b}{a+c} \cos A - 1 + \frac{a+b+c}{a+c} (1 - \cos A) - \frac{a \cdot \cos C}{a+c} = \\
 & = \frac{-c \cdot \cos A}{a+c} + \frac{-a \cdot \cos C}{a+c} - 1 + \frac{a+b+c}{a+c} = \\
 & = \frac{1}{a+c} \frac{a^2 - b^2 - c^2}{2b} + \frac{1}{a+c} \frac{c^2 - a^2 - b^2}{2b} + \frac{b}{a+c} = 0.
 \end{aligned}$$

Por tanto, $B'C'$ y OI_a son perpendiculares.