

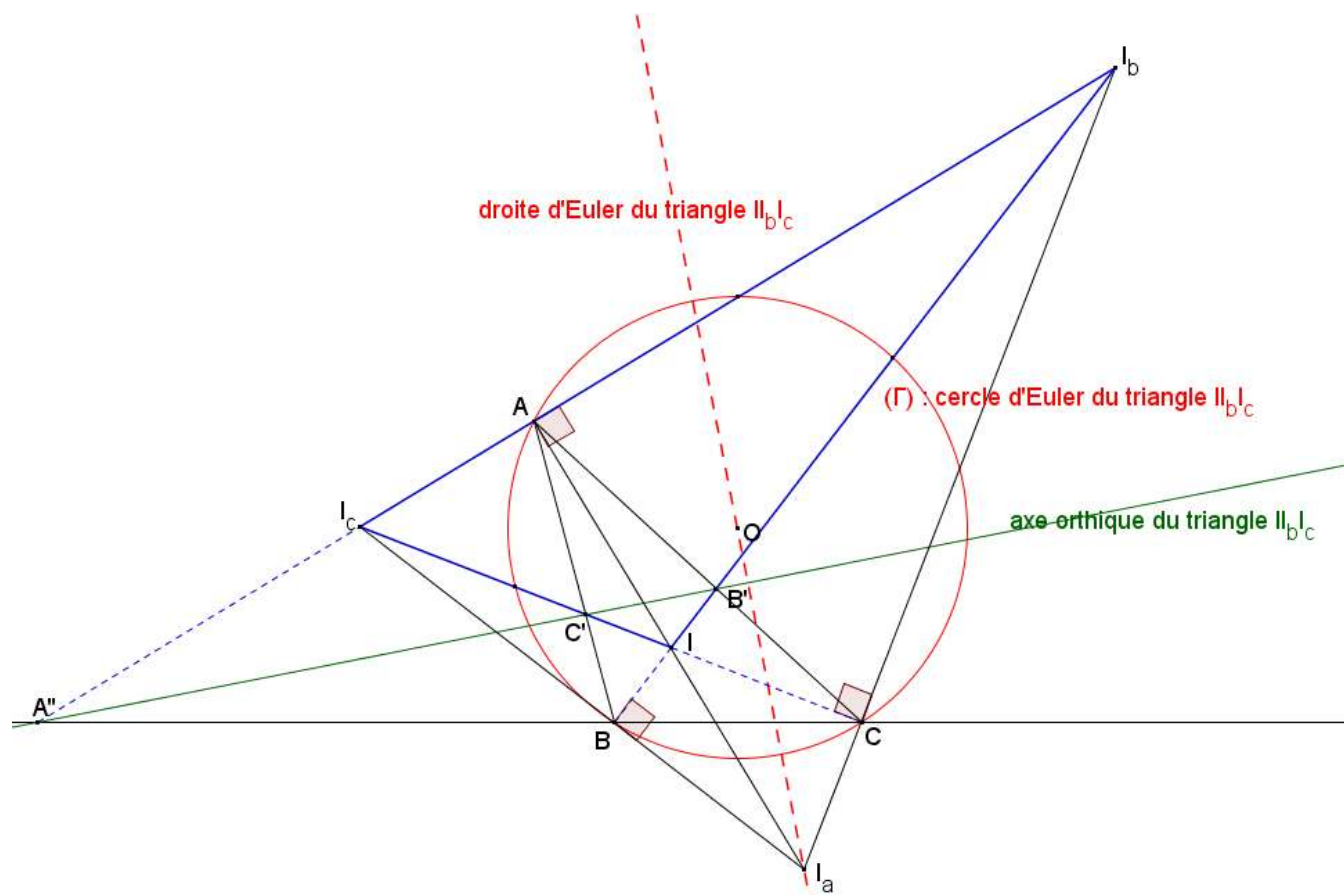
Problema n°847

Grinberg, D. (2003) Comunicación al foro Hyacinthos.

Sean AA' , BB' , y CC' las bisectrices internas del triángulo ABC .

Demostrar que $B'C'$ es perpendicular a OI_a , siendo O el circuncentro y siendo I_a el excentro del vértice A .

Solution proposée par Philippe Fondanaiche



On désigne par I le centre du cercle inscrit du triangle ABC et par I_a , I_b et I_c les centres des cercles exinscrits associés aux sommets A , B et C . Par construction le point I_a est l'orthocentre du triangle I_bI_cI .

Les points A , B et C sont les pieds des hauteurs sur les trois côtés I_bI_c , I_bI et I_cI . Le triangle I_bI_cI admet donc le cercle (Γ) circonscrit au triangle ABC comme cercle d'Euler et sa droite d'Euler qui joint O centre de (Γ) à l'orthocentre I_a est la droite OI_a .

Par ailleurs, les droites BC , CA et AB qui joignent les pieds des hauteurs coupent respectivement les côtés du triangle I_bI_cI respectivement aux points A' , B' et C' . Ces trois points sont alignés et appartiennent à l'axe orthique du triangle qui est perpendiculaire à sa droite d'Euler***.

Conclusion: OI_a est perpendiculaire à $B'C'$.

***Pour plus de détails sur les propriétés de l'axe orthique d'un triangle perpendiculaire à sa droite d'Euler, voir:

https://artofproblemsolving.com/community/c6h51168_ao_a_perp_de

<https://www.geogebra.org/m/g8J6M7vd>

https://en.wikipedia.org/wiki/Orthocentric_system

<http://users.math.uoc.gr/~pamfilos/eGallery/problems/OrthicAxis.html>

<http://www.gogeometry.com/school-college/3/p1233-orthic-axis-triangle-euler-line-perpendicular.htm>