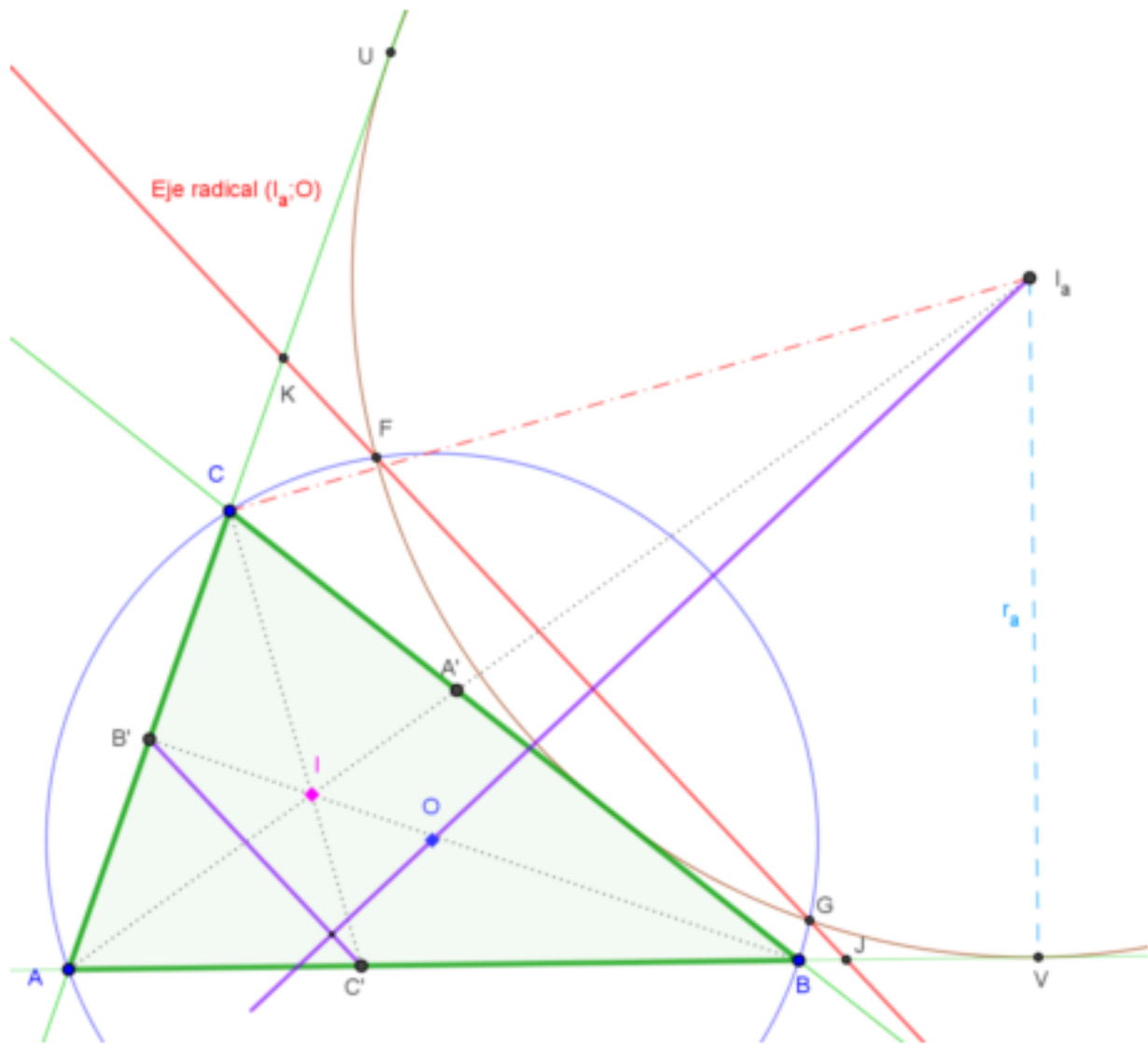


Problema 847

Sean AA', BB' y CC' las bisectrices internas del triángulo ABC . Demostrar que $B'C'$ es perpendicular a OI_a , siendo O el circuncentro y siendo I_a el excentro del vértice A .

Grinberg, D. (2003): Comunicación al foro Hyacinthos.

Solución de Saturnino Campo Ruiz, Profesor de Matemáticas jubilado, de Salamanca.



Nos piden que demostremos que la recta $B'C'$ y el eje radical de las circunferencias circunscrita y A -excrita, γ_A , son paralelas. Sabemos que los segmentos de las tangentes desde A a la circunferencia γ_A , AU y AV son de longitud igual al semiperímetro s del triángulo ABC . Asimismo los segmentos CU y BV tienen longitudes $s - b$ y $s - c$ respectivamente, por tanto, la ecuación del eje radical de esas circunferencias en coordenadas baricéntricas referidas al triángulo ABC es

$$s^2x + (s - c)^2y + (s - b)^2z = 0$$

Las coordenadas de los pies de las bisectrices desde B y C son $B' = (a:0:c)$ y $C' = (a:b:0)$, siendo $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} + \frac{z}{c}$ la ecuación de la recta que pasa por ellos. Se trata de ver que esta recta y el eje radical son paralelos.

El punto del infinito del eje radical se calcula resolviendo el sistema

$$\left. \begin{aligned} s^2x + (s - c)^2y + (s - b)^2z &= 0 \\ x + y + z &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Se obtiene el punto $W_\infty = (a(b - c): -b(a + c): c(a + b))$ que verifica la ecuación de $B'C'$ como queríamos demostrar. Fin. ■