Problema 848. El punto D en el lado BC del triángulo ABC es tal que los círculos de los triángulos ACD y ABD tienen igual radio. Demuestre que el radio común ρ está dado por la fórmula

$$\rho = \frac{S}{a+b+c+2\sqrt{s(s-a)}}$$

donde $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$, $s = (a+b+c)/2$ y S representa el doble del área del triángulo ABC.

Suppa, E. (2017): Comunicación personal.

Solución de Ercole Suppa. Recordemos el siguiente lema:

Lemma. *Sea D un punto en el lado BC del triángulo ABC. Sean r_1 y r_2 los radios de las circunferencias inscritas en los triángulos ACD y ABD, sea r el inradio de AB y sea h la longitud de la altura desde A a BC. Entonces*

$$\left(1-\frac{2r_1}{h}\right)\left(1-\frac{2r_2}{h}\right) = 1-\frac{2r}{h}$$

Prueba. La demostración se da en [1] ∎

Por el lema, tenemos

$$\begin{aligned}
\left(1-\frac{2\rho}{h_a}\right)^2 = 1-\frac{2r}{h_a} \quad &\Leftrightarrow \\
1-\frac{2a}{S}\rho = \sqrt{1-\frac{2a}{S}\cdot\frac{S}{2s}} \quad &\Leftrightarrow \\
1-\frac{2a}{S}\rho = \sqrt{1-\frac{a}{s}} \quad &\Leftrightarrow \\
\frac{2a}{S}\rho = 1-\sqrt{1-\frac{2a}{a+b+c}} \quad &\Leftrightarrow \\
\frac{2a}{S}\rho = 1-\sqrt{\frac{b+c-a}{a+b+c}} &
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\rho &= \frac{S}{2a}\cdot\frac{\sqrt{a+b+c}-\sqrt{b+c-a}}{\sqrt{a+b+c}} \\
&= \frac{S}{2a}\cdot\frac{\left(\sqrt{a+b+c}-\sqrt{b+c-a}\right)\left(\sqrt{a+b+c}+\sqrt{b+c-a}\right)}{\sqrt{a+b+c}\left(\sqrt{a+b+c}+\sqrt{b+c-a}\right)} \\
&= \frac{S}{2a}\cdot\frac{2a}{a+b+c+\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)}} \\
&= \frac{S}{a+b+c+2\sqrt{s(s-a)}}
\end{aligned}$$

[1] See `http://garciacapitan.esy.es/problemas/sakabe/rigby.htm`

$\square$

Observación. Si $\angle A = 90^\circ$ obtenemos el siguiente resultado:

$$\rho = \frac{bc}{a+b+c+\sqrt{2bc}}$$

De hecho, teniendo en cuenta $a^2 = b^2 + c^2$ y $S = bc$, tenemos

$$\rho = \frac{S}{a+b+c+\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)}} = \frac{bc}{a+b+c+\sqrt{(b+c)^2-a^2}} = \frac{bc}{a+b+c+\sqrt{2bc}}$$