

Problema 848

El punt D en el costat $\overline{BC}$ del triangle $\triangle ABC$ és tal que les circumferències inscrites als triangles $\triangle ACD$ i $\triangle ABD$ tenen el mateix radi. Demostreu que el radi comú ve donat per la fórmula:

$$\rho = \frac{S}{a+b+c+2\sqrt{s(s-a)}} \text{ on } s = \frac{a+b+c}{2} \text{ i } S \text{ és el doble de l'àrea del triangle}$$

$\triangle ABC$.

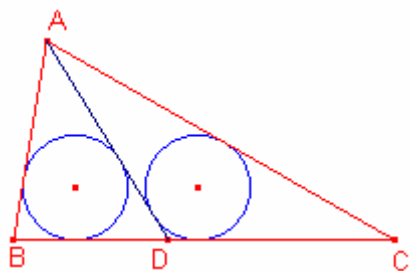
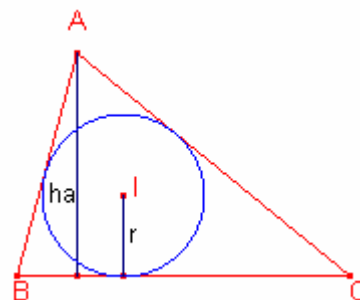
Proposat per Ercole Suppa

Solució de Ricard Peiró i Estruch:

Nota:

En qualsevol triangle $\triangle ABC$ de altura h_a i r el radi de la circumferència inscrita:

$$1 - \frac{2r}{h_a} = \operatorname{tg} \frac{B}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \frac{-a+b+c}{a+b+c}.$$



Siga $\alpha = \angle ADB$

Aplicant el teorema anterior al triangle $\triangle ABD$:

$$1 - \frac{2\rho}{h_a} = \operatorname{tg} \frac{B}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

Aplicant el teorema anterior al triangle $\triangle ADC$:

$$1 - \frac{2\rho}{h_a} = \operatorname{tg} \frac{C}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{180^\circ - \alpha}{2}.$$

Multiplicant ambdues expressions:

$$\left(1 - \frac{2\rho}{h_a}\right)^2 = \operatorname{tg} \frac{B}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{C}{2} \cdot \operatorname{tg} \left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right). \text{ Notem que } \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg} \left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) = 1.$$

$$\left(1 - \frac{2\rho}{h_a}\right)^2 = \operatorname{tg} \frac{B}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{C}{2}. \text{ Resolent l'equació en la incògnita } \rho:$$

$$\rho = \frac{h_a}{2} \left(1 - \sqrt{\operatorname{tg} \frac{B}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{C}{2}}\right).$$

$$\rho = \frac{h_a}{2} \left(\frac{1 - \operatorname{tg} \frac{B}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{C}{2}}{1 + \sqrt{\operatorname{tg} \frac{B}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{C}{2}}} \right).$$

$$\rho = \frac{h_a}{2} \left(\frac{1 - \frac{-a+b+c}{a+b+c}}{1 + \sqrt{\frac{-a+b+c}{a+b+c}}} \right).$$

$$\rho = \frac{a \cdot h_a}{a+b+c + \sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)}}.$$

$$\rho = \frac{S}{a+b+c + 2\sqrt{s(s-a)}}.$$