Problema 848

El punto D en el lado $\overline{BC}$ del triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$ es tal que las circunferencias inscritas a los triángulos $\overset{\Delta}{ACD}$ y $\overset{\Delta}{ABD}$ tienen el mismo radio.

Demostrar que el radio común viene dado por la fórmula:

$\rho = \dfrac{S}{a+b+c+2\sqrt{s(s-a)}}$ on $s = \dfrac{a+b+c}{2}$ y S es el doble del área del triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$.

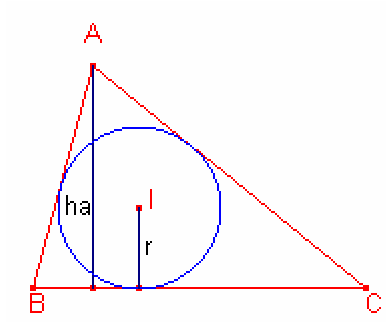
Propuesto por Ercole Suppa

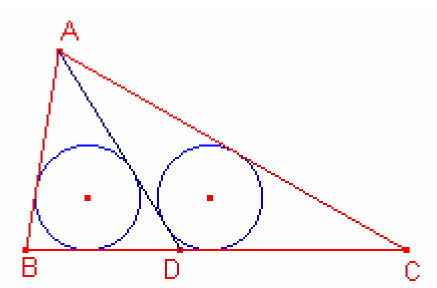
Solución de Ricard Peiró i Estruch:

Nota:

En cualquier triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$ de altura h_a y r el radio de la circunferencia inscrita:

$$1-\frac{2r}{h_a} = \operatorname{tg}\frac{B}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{C}{2} = \frac{-a+b+c}{a+b+c}.$$





Sea $\alpha = \angle ADB$

Aplicando el teorema anterior al triángulo $\overset{\Delta}{ABD}$:

$$1-\frac{2\rho}{h_a} = \operatorname{tg}\frac{B}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

Aplicando el teorema anterior al triángulo $\overset{\Delta}{ADC}$:

$$1-\frac{2\rho}{h_a} = \operatorname{tg}\frac{C}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{180^{o}-\alpha}{2}.$$

Multiplicando ambas expresiones:

$\left(1-\dfrac{2\rho}{h_a}\right)^2 = \operatorname{tg}\dfrac{B}{2}\cdot\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{tg}\dfrac{C}{2}\cdot\operatorname{tg}\left(90^{o}-\dfrac{\alpha}{2}\right)$. Notemos que . $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}\cdot\cdot\operatorname{tg}\left(90^{o}-\dfrac{\alpha}{2}\right) = 1$.

$\left(1-\dfrac{2\rho}{h_a}\right)^2 = \operatorname{tg}\dfrac{B}{2}\cdot\operatorname{tg}\dfrac{C}{2}$. Resolviendo la ecuación en la incógnita ρ:

$$\rho = \frac{h_a}{2}\left(1-\sqrt{\operatorname{tg}\frac{B}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{C}{2}}\right).$$

$$\rho = \frac{h_a}{2}\left(\frac{1 - \mathrm{tg}\frac{B}{2}\cdot\mathrm{tg}\frac{C}{2}}{1 + \sqrt{\mathrm{tg}\frac{B}{2}\cdot\mathrm{tg}\frac{C}{2}}}\right).$$

$$\rho = \frac{h_a}{2}\left(\frac{1 - \frac{-a+b+c}{a+b+c}}{1 + \sqrt{\frac{-a+b+c}{a+b+c}}}\right).$$

$$\rho = \frac{a\cdot h_a}{a+b+c+\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)}}.$$

$$\rho = \frac{S}{a+b+c+2\sqrt{s(s-a)}}.$$