

### Problema n°848

Propuesto por Ercole Suppa, profesor titular de matemáticas y física del Liceo Scientifico "A. Einstein"

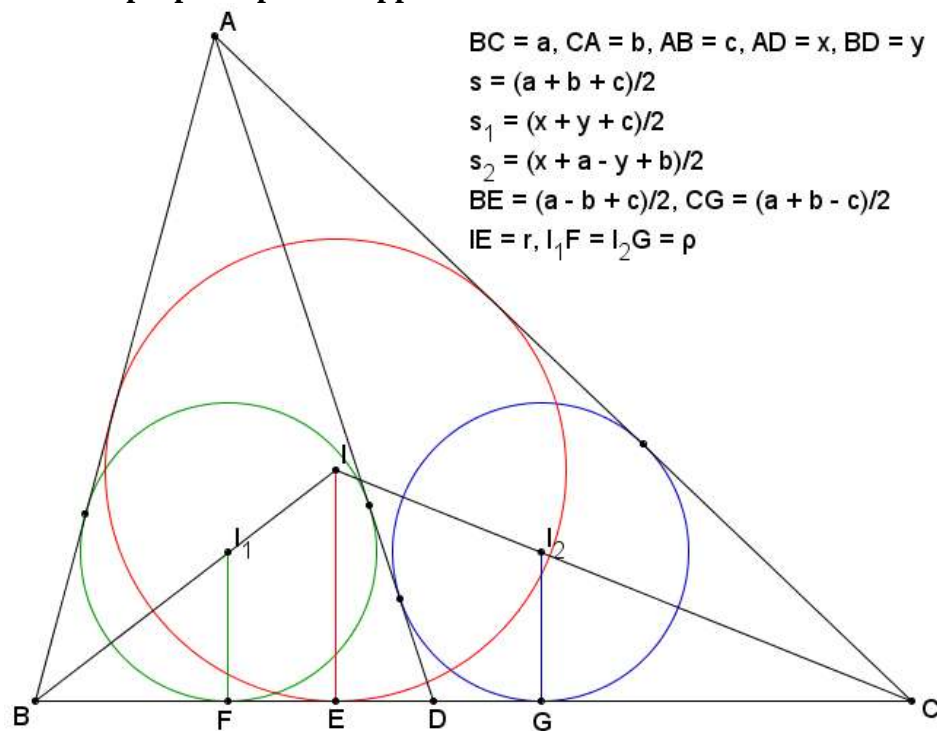
El punto D en el lado BC del triángulo ABC es tal que los círculos

inscritos de los triángulos ACD y ABD tienen igual radio. Demuestre que el radio común está dado por la fórmula

$$\rho = \frac{S}{a + b + c + 2\sqrt{s(s-a)}}$$

Donde  $a=BC$ ,  $b=CA$ ,  $c=AB$ ,  $s=(a+b+c)/2$ , y  $S$  es el doble del área del triángulo ABC.

### Solution proposée par Philippe Fondanaiche



On trace le cercle inscrit du triangle ABC qui a pour centre I et rayon  $IE = r$ . Les cercles inscrits des triangles ABD et ACD ont pour centres  $I_1$  et  $I_2$  et ont même rayon  $\rho$ .

On complète les notations de l'énoncé avec les segments  $AD = x$ ,  $BD = y$ ,  $CD = a - y$ ,

$BE = (a - b + c)/2 = s - b$ ,  $CG = (a + b - c)/2 = s - c$ .

Les demi-périmètres des triangles ABD et ACD sont respectivement  $s_1 = (x + y + c)/2$  et  $s_2 = (x + a - y + b)/2$ . On a  $s_1 + s_2 = s + x$ . De plus  $BF = s_1 - x$  et  $CG = s_2 - x$ .

La somme des aires des triangles ABD et ACD étant égale à l'aire du triangle ABC, on a :  $S/2 = s \cdot r = (s_1 + s_2)\rho = (s + x)\rho$ , ce qui donne  $\rho = S/(2s + 2x) = S/(a + b + c + 2x)$

Pour obtenir la formule de l'énoncé, il suffit donc de démontrer que  $x^2 = s(s - a)$ .

Les triangles BIE et  $BFI_1$  sont semblables de même que les triangles CEI et  $CGI_2$ .

Il en résulte que  $(s - b)/(s_1 - x) = r/\rho = (s - c)/(s_2 - x)$ .

Comme  $r/\rho = (s + x)/s$ , on est ramené aux deux équations:

$s(s - b) - ss_1 + sx = xs_1 - x^2$  et  $s(s - c) - ss_2 + sx = xs_2 - x^2$  dont l'addition donne:

$s(2s - b - c) - s(s_1 + s_2) + 2sx = x(s_1 + s_2) - 2x^2$

soit encore

$sa - s(s + x) + 2sx = x(s + x) - 2x^2$  qui se réduit à  $x^2 = s(s - a)$ . Cqfd