Quincena del 16 al 31 de Septiembre de 2017

Propuesto por Ercole Suppa, profesor titular de matemáticas y física del Liceo Scientifico "A. Einstein"

***Problema* 848**.- El punto D en el lado BC del triángulo ABC es tal que los círculos

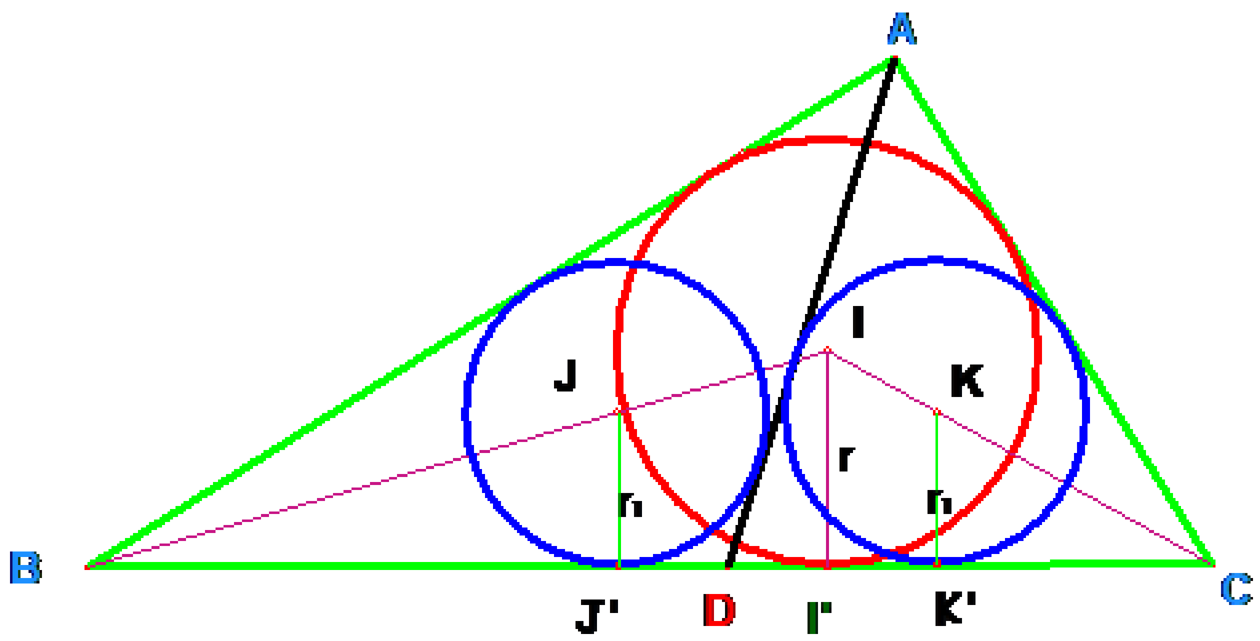
inscritos de los triángulos ACD y ABD tienen igual radio. Demuestre que el radio común está dado por la fórmula

$$r_1 = \frac{S}{a+b+c+2\sqrt{p(p-a)}}$$

donde $a = BC, b = CA, c = AB, p = \frac{a+b+c}{2}$, y S es el doble del área del triángulo ABC.

Suppa, E. (2017) : Comunicación personal.

Solución de Saturnino Campo Ruiz, Profesor de Matemáticas jubilado, de Salamanca.



En el problema 346 de esta revista (1ª quincena del año 2006) ya ha sido considerado este asunto, aunque el enunciado es más amplio.

Tomamos de allí lo que concierne a este problema.

Vamos a calcular la longitud del segmento AD de forma que los incírculos de los triángulos parciales obtenidos sean iguales. Sean p el semiperímetro de $ABC, d = AD$ y $a = BC$.

Para los triángulos de igual altura e incírculo ABD y ADC, se tiene

$$\frac{2r_1}{h} = \frac{a'}{p'} = \frac{a''}{p''} = \frac{a}{p+d} \qquad (1)$$

donde a', a'', p' y p'' son las bases y semiperímetros respectivos.

Para las áreas $[ABC] = [ABD] + [ADC]$, o bien $pr = (p+d)r_1$. Despejando

$$r_1 = \frac{pr}{p+d} \qquad (2)$$

Los incentros junto con los puntos de contacto con la base y los vértices B y C forman triángulos rectángulos. Son semejantes $BJ'J$ y $BI'I$ de una parte y $CK'K$ y $CI'I$ de otra. Por tanto

$$\frac{BJ'}{BI'} = \frac{r_1}{r} = \frac{CK'}{CI'} = \frac{BJ'+CK'}{BI'+CI'} = \frac{p-d}{a} \qquad (3)$$

siendo $BI' = p - b, BJ' = p' - d;\ CI' = p - c, CK' = p'' - d$.

De la igualdad entre la segunda y la última razón de (3) despejamos

$$r_1 = \frac{p-d}{a} r \qquad (4)$$

De (2) y (4) eliminando los radios obtenemos

$$d^2 = p(p-a) \qquad (5)$$

que permite calcular d como media proporcional entre dos segmentos.
Ahora usando (5) vamos a transformar la expresión del problema:

$$r_1 = \frac{S}{a+b+c+2\sqrt{p(p-a)}} = \frac{2pr}{2p+2\sqrt{p(p-a)}} = \frac{pr}{p+d}$$

que es la expresión (2) del radio común.

■