

Problema 849

Resoleu el triangle coneguts l'angle A la mitjana m_a i la suma dels costats $b + c$.

Solució Ricard Peiró i Estruch:

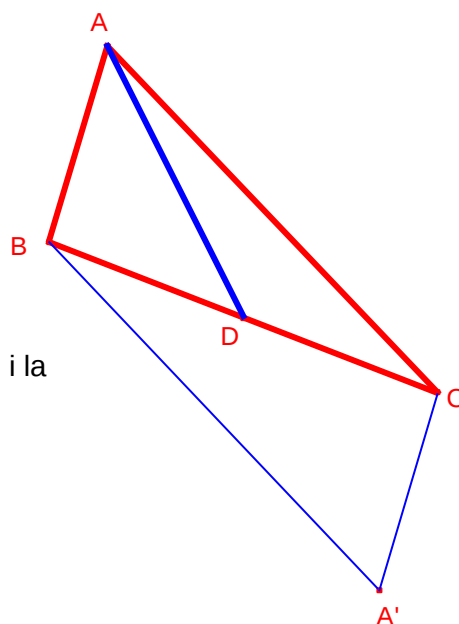
Suposem resolt el problema.

Siga D el punt mig del costat $\overline{BC}$.

Siga A' el simètric de A respecte de D.

$\overline{AA'} = 2 \cdot m_a$, $\angle ABA' = 180^\circ - A$, $\overline{BA'} = b$.

Per a resoldre el problema resoldrem el triangle $\triangle ABA'$ coneguts l'angle $\angle ABA' = 180^\circ - A$, el costat $\overline{AA'} = 2 \cdot m_a$ i la suma dels altres costat $b + c$.



Procés de construcció:

a) Dibuixar el segment $\overline{AA'} = 2 \cdot m_a$.

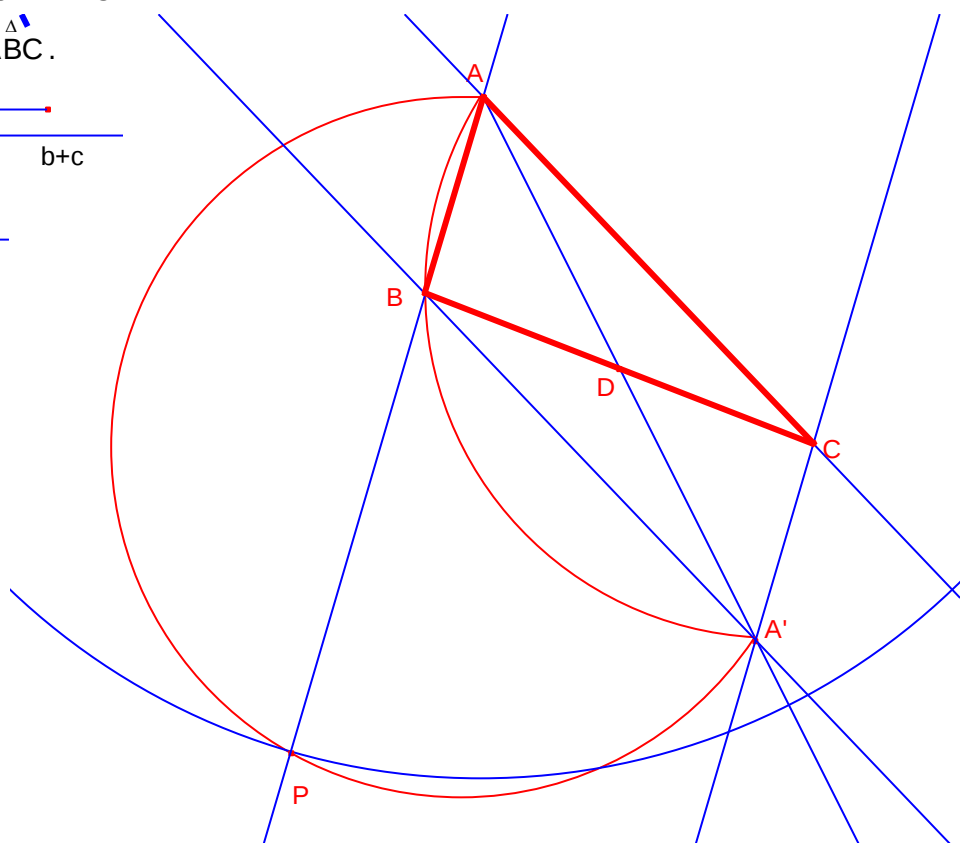
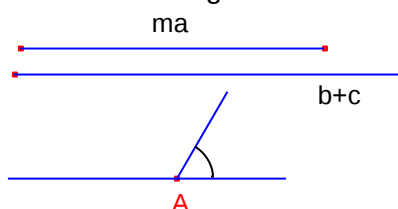
b) Sobre el segment anterior dibuixar els arcs capaços $180^\circ - A$ i $\frac{180^\circ - A}{2}$.

c) Dibuixar la circumferència de centre A i radi $b + c$. Que talla l'arc capaç $\frac{180^\circ - A}{2}$ en el punt P.

d) Dibuixar la recta AP que talla l'arc capaç $180^\circ - A$ en el punt B.

e) Dibuixar el quadrilàter $ABA'C$.

f) Dibuixar el triangle $\triangle ABC$.



Problema:

Resoleu el triangle $\triangle ABC$ coneguts $A = 60^\circ$, $m_a = 4$, $b + c = 9$.

Aplicant la fórmula de la mitjana:

$$4^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}. \text{ Simplificant:}$$

$$64 = 2b^2 + 2c^2 - a^2 \quad (1)$$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\triangle ABC$:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos 60^\circ.$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - bc \quad (2)$$

Substituint l'expressió (2) en l'expressió (1):

$$64 = b^2 + c^2 + bc \quad (3)$$

Considerem el sistema:

$$\begin{cases} 64 = b^2 + c^2 + bc \\ b + c = 9 \end{cases}. \text{ Resolent el sistema: } \begin{cases} b = \frac{9 + \sqrt{13}}{2} \\ c = \frac{9 - \sqrt{13}}{2} \end{cases}.$$

Substituint els valors b , c en l'expressió (2):

$$a = \sqrt{30}.$$