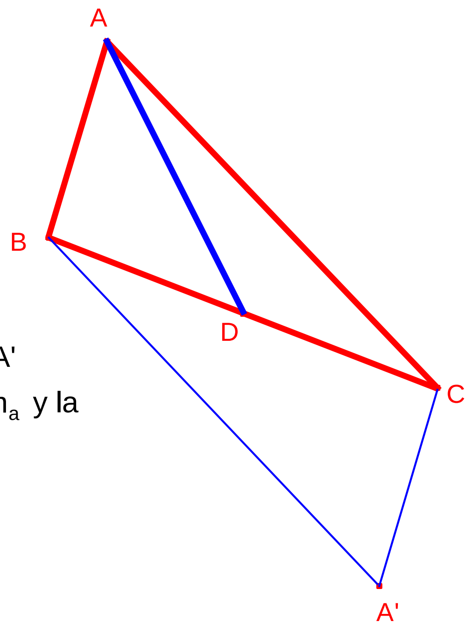
Problema 849

Resolver el triángulo conocidos el ángulo A la mediana m_a y la suma de los lados $b+c$.



Solución Ricard Peiró i Estruch:

Supongamos resuelto el problema.

Sea D el punto medio del lado $\overline{BC}$.

Sea A’ el simétrico de A respecto de D.

$\overline{AA'}=2\cdot m_a$, $\angle ABA'=180º-A$, $\overline{BA'}=b$.

Para resolver el problema resolveremos el triángulo $\overset{\Delta}{ABA'}$ conocidos el ángulo $\angle ABA'=180º-A$, el lado $\overline{AA'}=2\cdot m_a$ y la suma de los otros lados $b+c$.

Proceso de construcción:

a) Dibujar el segmento $\overline{AA'}=2\cdot m_a$.

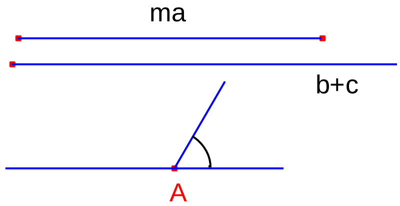
b) Sobre el segmento anterior dibujar los arcos capaces $180º-A$ y $\frac{180º-A}{2}$.

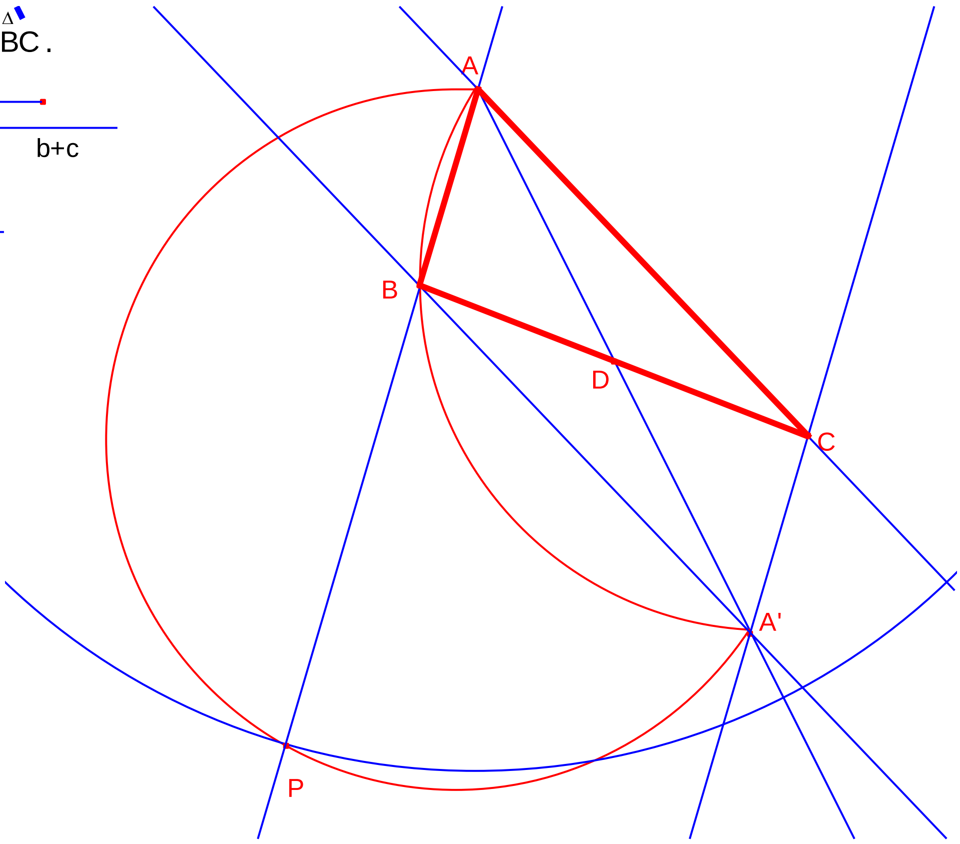
c) Dibujar la circunferencia de centro A y radio $b+c$. Que corta el arco capaz $\frac{180º-A}{2}$ en el punto P.

d) Dibujar la recta AP que corta el arco capz $180º-A$ en el punto B.

e) Dibujar el cuadrilátero ABA’C.

f) Dibujar el triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$.





Problema:

Resolver el triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$ conocidos $A = 60º$, $m_a = 4$, $b + c = 9$.

Aplicando la fórmula de la mediana:

$4^2 = \dfrac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}$. Simplificando:

$$64 = 2b^2 + 2c^2 - a^2 \qquad (1)$$

Aplicando el teorema del coseno al triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos 60º$.

$$a^2 = b^2 + c^2 - bc \qquad (2)$$

Substituyendo la expresión (2) en a 'expresión (1):

$$64 = b^2 + c^2 + bc \qquad (3)$$

Consideremos el sistema:

$\begin{cases} 64 = b^2 + c^2 + bc \\ b + c = 9 \end{cases}$. Resolviendo el sistema: $\begin{cases} b = \dfrac{9 + \sqrt{13}}{2} \\ c = \dfrac{9 - \sqrt{13}}{2} \end{cases}$.

Substituyendo los valores b, c en la expresión (2):

$a = \sqrt{30}$.