

Problema 850

Resoleu el triangle coneguts l'angle A la mitjana m_a i la diferència dels costats $b - c$.

Solució de Ricard Peiró:

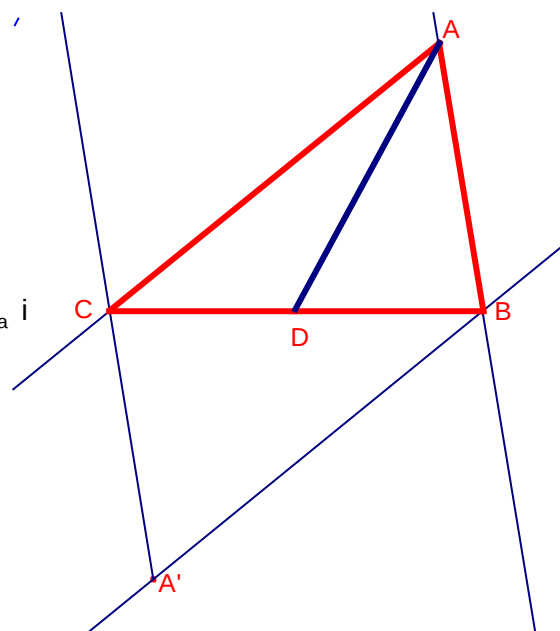
Suposem resolt el problema.

Siga D el punt mig del costat $\overline{BC}$.

Siga A' el simètric de A respecte de D.

$\overline{AA'} = 2 \cdot m_a$, $\angle ACA' = 180^\circ - A$, $\overline{CA'} = c$.

Per a resoldre el problema resoldrem el triangle $\triangle ACA'$ coneguts l'angle $\angle ACA' = 180^\circ - A$, el costat $\overline{AA'} = 2 \cdot m_a$ i la diferència dels altres costats $b - c$.



Procés de construcció:

a) Dibuixeu el segment $\overline{AA'} = 2 \cdot m_a$.

b) Sobre el segment anterior dibuixar l'arc capaç

$$90^\circ + \frac{180^\circ - A}{2} = 180^\circ - \frac{A}{2}.$$

En aquest arc es troba l' incentre I del triangle $\triangle ACA'$.

c) Dibuixeu el punt T sobre el segment $\overline{AA'}$ tal que $\overline{AT} = \frac{a + b - c}{2}$.

T és el punt de tangència de la circumferència inscrita al triangle $\triangle ACA'$.

d) Dibuixeu la recta perpendicular al segment $\overline{AA'}$ que passa per T. La recta talla l'arc capaç en el punt I.

e) Dibuixeu les rectes AI, A'I.

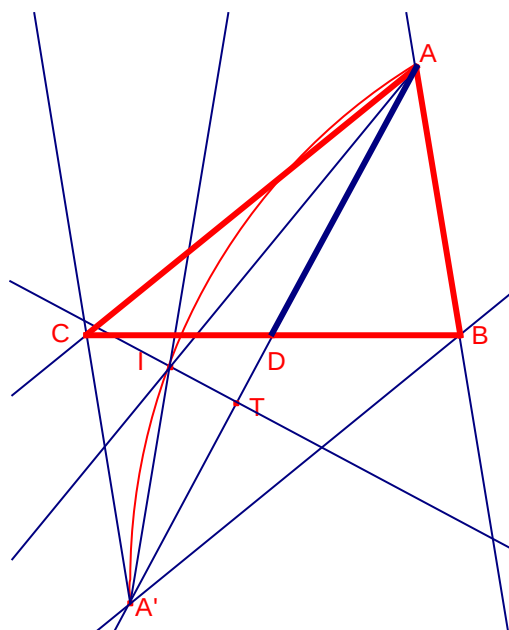
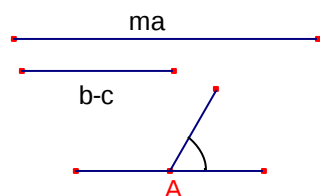
f) Dibuixeu la recta simètrica de AA' respecte de AI.

g) Dibuixeu la recta simètrica de AA' respecte de A'I.

h) Les dues rectes anteriors es tallen en el punt C.

e) Dibuixeu el paral·lelogram ABA'C.

f) Dibuixeu el triangle $\triangle ABC$.



Problema:

Resoleu el triangle $\triangle ABC$ coneguts $A = 60^\circ$, $m_a = 4$, $b - c = 2$.

Aplicant la fórmula de la mitjana:

$$4^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}. \text{ Simplificant:}$$

$$64 = 2b^2 + 2c^2 - a^2 \quad (1)$$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\triangle ABC$:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos 60^\circ.$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - bc \quad (2)$$

Substituint l'expressió (2) en l'expressió (1):

$$64 = b^2 + c^2 + bc \quad (3)$$

Considerem el sistema:

$$\begin{cases} 64 = b^2 + c^2 + bc \\ b - c = 2 \end{cases}. \text{ Resolent el sistema: } \begin{cases} b = -1 + \sqrt{21} \\ c = 1 + \sqrt{21} \end{cases}.$$

Substituint els valors b , c en l'expressió (2):

$$a = \sqrt{23}.$$