

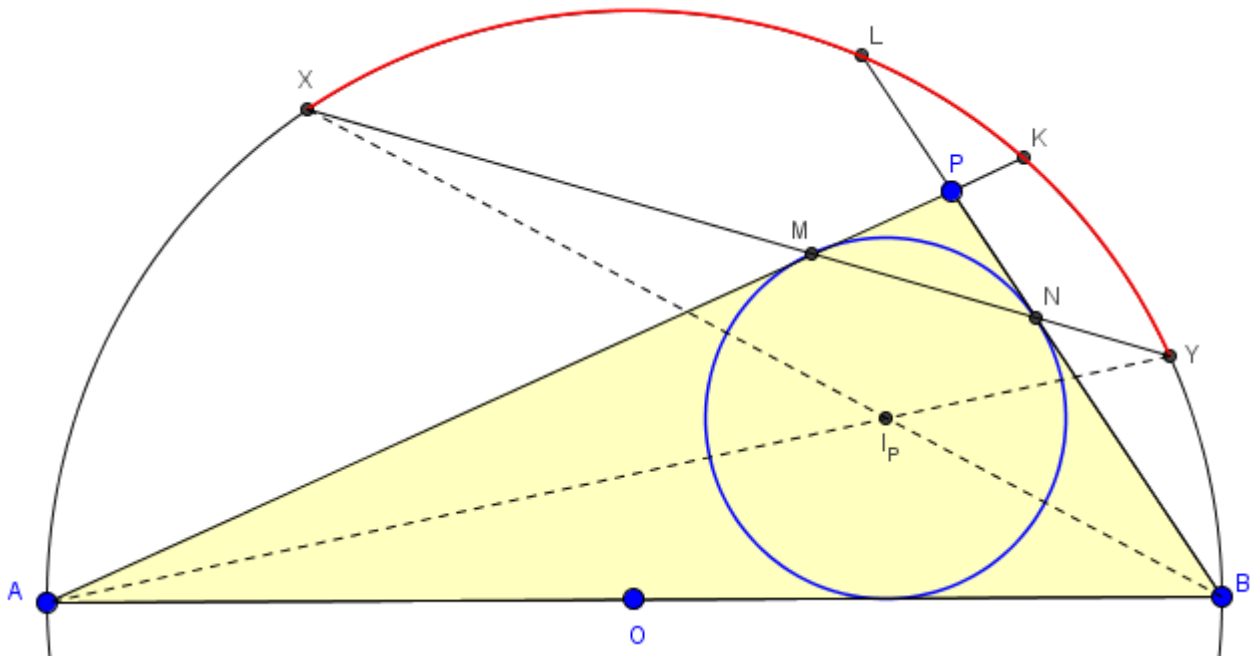
Problema 852.-

Sea P un punto interior de un semicírculo de diámetro AB . La circunferencia inscrita al triángulo ABP es tangente a los lados AP y BP en los puntos M y N , respectivamente. La recta MN corta a la semicircunferencia en los puntos X y Y .

Pruebe que la medida del arco XY es igual a la medida del ángulo APB .

Referencia desconocida.

Solución de Florentino Damián Aranda Ballesteros, profesor del IES Blas Infante de Córdoba.



A la vista de la construcción realizada, encontramos las siguientes relaciones entre ángulos en dicha figura:

Sean $\alpha = \angle I_P AB = \angle PAI_P$ y $\beta = \angle I_P BA = \angle PBI_P$. Entonces, $\angle APB = 180^\circ - 2(\alpha + \beta)$.

Además $\angle PMN = \angle PNM = \alpha + \beta$, hecho que implica que los puntos X, I_P y B estén alineados.

Esto mismo les ocurrirá a los puntos Y, I_P y A .

Por otra parte, tenemos que $\angle AYB = 90^\circ \rightarrow \angle ABY = 90^\circ - \alpha$.

De este modo, $\angle LBY = \angle ABY - \angle ABL = 90^\circ - \alpha - 2\beta$

La medida del ángulo $\angle XBL = \beta$.

Si sumamos ambos ángulos, obtenemos $\angle XBY = \angle LBY + \angle XBL = (90^\circ - \alpha - 2\beta) + \beta = (90^\circ - \alpha - \beta)$.

En definitiva, hemos conseguido probar que:

$\text{Arco}(XY) = 2\angle XBY = 180^\circ - 2(\alpha + \beta) = \angle APB \rightarrow \text{Arco}(XY) = \angle APB$.

cqd ■